تعريف علم الإحصاء

(الإحصاء منهج علمي لحصر الأشياء وكلمة حصر هنا تعني عد الأشياء وترتيبها ليسهل فهمها ومن ثم عرضها وتحليلها واكتشاف نمط التغيرات فيها) الإحصاء الوصفي

(الإحصاء عبارة عن مجموعة من أدوات التحليل التي تستخدم لاستنباط معالم الكل (المجتمع) من خلال معالم الجزء (العينة) اي دراسة المجتمع من خلال عينة ممثلة له) إحصاء استنباطي

تصنيف البيانات الإحصائية

يمكن تصنيف البيانات الاحصائية الى ثلاث تصانيف فيمكن تصنيفها الى

التصنيف الأول

1- بيانات خام (وهي التي يتم الحصول عليها مباشرة)

2- بيانات درجة خام وهي الدرجة التي يتم الحصول عليها من تطبيق الاحصاء

التصنيف الثاني حسب المصادر هنالك مصدران

1- مصادر تاريخية مثل الكتب والمجلات والمنشورات ويمكن تقسيمها الي (اصلية وهي التي تعدها الجهة التي قامت بالدراسة، وثانوية وهي كل ما عدا ذلك)

2- مصادر ميدانية وهي مصادر مباشرة

التصنيف الثالث حسب النوع

1- بيانات كمية وقد تكون كمية منفصلة وهي التي يمكن قياسها بالعد مثل عدد الحجرات في المنزل، وقد تكون كمية متصلة ويتم الحصول عليها عن طريق القياس وتأخذ أي قيم داخل مدى معين سواء أن كانت صحيحة أو كسرية

2- بيانات غير كمية (نوعية او وصفية) مثل مستوى التعليم

جمع البيانات

تُجمع البيانات الاحصائية بثلاث اساليب رئيسية هي

1- اسلوب المسح وتنقسم الي

أ- الحصر الشامل (المسح الشامل) : اي جمع المعلومات عن كل مفردة من مفردات المجتمع على حده ونتحصل على البيانات عن طريق المقابلات الشخصية أو من السجلات والتقارير

ملحوظة : المقصود بالمجتمع هنا المجتمع تحت الدراسة

ب- اسلوب العينات(المسح بالعينة): اي دراسة المجتمع من خلال عينة ممثلة له وتعميم النتائج على كل المجتمع وهنالك طرق معينة تستخدم لاختيار العينة الممثلة للمجتمع دون تحيز والأسباب التي تؤدي لاستخدام اسلوب العينات بدلاً عن الحصر الشامل هي

أ- اذا كان حجم المجتمع لا نهائي

ب- اذا كان المجتمع اكبر مما تسمح به الامكانيات المتوفرة (امكانيات مادية – امكانيات زمنية- عمالة مدربة- مواصلات)

ج- اذا كان فحص المفردات يؤدي الى اتلافة

2- الأسلوب التجريبي: يستخدم في مجال الطب ومجال الزراعة بكثرة ويعتمد على التحكم في كل ظروف التجربة ماعدا العنصر تحت الدراسة ويتم الحصول على البيانات عن طريق المشاهدة

3- أسلوب السلاسل الزمنية: يتم الحصول على البيانات عن طريق رصد البيانات التي تعبر عن ظاهرة ما عند نقاط زمنية متتالية مثل كمية الصادرات السنوية وعدد الحوادث اليومية في احدى البلاد

في كثير من الاحيان نحتاج لتصميم استمارة إحصائية لجمع المعلومات.

عرض البيانات

بانتهاء عملية جمع البيانات تبدأ عملية المراجعة وبعدها تأتي عملية العرض للبيانات وتنقسم طرق عرض البيانات الى عرض جدولي وعرض بياني

أولا العرض الجدولي: تنقسم الجداول الإحصائية الى عدة اشكال من اهمها جدول التوزيع التكراري

أولاً العرض الجدولي لبيانات نوعية أو غير كمية

خطوات تكوين جدول التوزيع التكراري :

العرض الجدولي لبيانات نوعية أو غير كمية

مثال :البيانات التالية توضح هوايات 12 طالب بكلية العلوم

قراءة رسم رياضة رياضة موسيقى رسم

قراءة رياضة رسم رياضة قراءة رياضة

المطلوب : كون جدول التوزيع التكراري واحسب التكرار النسبي

الحل

الفئات (ف)	التكرارات (ك) f	التكرار النسبي
قراءة	3	3/12=0.25
رسم	3	0.25
رياضة	5	0.42
موسيقي	1	0.08

مثال

البيانات التالية توضح تقديرات 16 طالب في مادة الاحصاء

A C C B D A C F D B B A C F C A

المطلوب: كون جدول التوزيع التكراري والتكرار النسبي

الحل

الفئات (ف)	التكرارات (F)	التكرار النسبي
A	4	4/16=0.25
C	5	0.31
B	3	0.19
D	2	0.125
F	2	0.125

العرض الجدولي لبيانات كمية

مثال: البيانات التالية توضح درجات 15 طالب

12 22 16 18 18 19 14 21 19 13 14 16

17 21 12 المطلوب كون جدول التوزيع التكراري

الحل

الخطوة الأولى : نحسب المدى = أكبر مفردة – أقل مفردة

$$22 - 12 = 10$$

الخطوة الثانية : نحدد عدد الفئات حيث

$$NC = 1+3.222 \text{Log } n = 1+3.222 \text{Log} 15 = 4.789 \approx 5$$

الخطوة الثالثة: نحسب طول الفئة حيث

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$$

تابع للحل

طول الفئة = 5/10 = 2

الخطوة الرابعة : نكون الجدول ونبدأ بأصغر مفردة

الفئات c	التكرار f
-12	3
-14	2
-16	3
-18	4
20- 22	3

مثال

1- البيانات التالية توضح درجات عشرين طالب في واجب للإحصاء

1 4 3 0 1 4 2 3 5 4 0 3 1 3 0 4 2 0
4 2

المطلوب:

1- أعرض البيانات السابقة في شكل جدول تكراري

2- احسب التكرار النسبي

الحل

الخطوة الأولى : نحسب المدى = أكبر مفردة – أقل مفردة

$$5 = 0 - 5$$

الخطوة الثانية : نحدد عدد الفئات حيث

$$NC = 1+3.222\text{Log } n= 1+3.222\text{Log}20 =5.19\approx5$$

الخطوة الثالثة: نحسب طول الفئة حيث

طول الفئة = المدى / عدد الفئات

تابع للحل

طول الفئة = 5/5 = 1

الخطوة الرابعة : نكون الجدول ونبدأ بأصغر مفردة

الفئات c	التكرار f	التكرار النسبي
-0	4	0.2
-1	3	0.15
-2	3	0.15
-3	4	0.2
5 -4	6	0.3

مثال

1- كون جدول التوزيع التكراري والتكرار النسبي للبيانات التالية

19 16 18 12 16 17 14 16 15 14 22 13
25 22 18 20 19 13 15

2- البيانات التالية توضح فصيلة الدم لمجموعة من اللاعبين بفريق الاتحاد

A B B+ B O A+ O+ B O B+ A+

المطلوب كون جدول التوزيع التكراري

الحل

الخطوة الأولى : نحسب المدى = أكبر مفردة – أقل مفردة

13 = 12 - 25

الخطوة الثانية : نحدد عدد الفئات حيث

$NC = 1+3.222 \text{Log } n=$

$1+3.222 \text{Log} 19 = 5.12 \approx 5$

الخطوة الثالثة: نحسب طول الفئة حيث

طول الفئة = المدى / عدد الفئات

تابع للحل

طول الفئة = 5/13 = 2.6

الخطوة الرابعة : نكون الجدول ونبدأ بأصغر مفردة

التكرار النسبي	التكرار f	الفئات c
0.263	5	-12
0.315	6	-14.6
0.211	4	-17.2
0.158	3	-19.8
0.053	1	25 -22.4

تابع للحل

2- نكون جدول التوزيع التكراري للفئات الغير كمية

الفئات (ف)	التكرارات (F)
A	1
A+	2
B	3
B+	2
O	2
O+	1

ملحوظات

- يمكن حساب مراكز الفئات حيث

مركز الفئة = الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى لنفس الفئة

2

- طول الفئة = الحد الأعلى للفئة -الحد الأدنى لنفس الفئة
- النسبة المئوية = التكرار النسبي *100

مثال

اذا كان التوزيع العمري لعائلة مكونة من 22 فرد كما يلي

F	c
5	- 4
7	- 9
3	- 14
4	- 19
3	29 - 24

أجب عن الأسئلة التالية: أ- ما هو عدد الفئات في التوزيع

ب- طول الفئة ت- الحد الأدنى للفئة الرابعة

ث- تكرار الفئة الثانية ج- النسبة المئوية للأفراد الذين أعمارهم 14 سنة فأكثر ح- النسبة المئوية للأفراد الذين أعمارهم أقل من 19 سنة

خ- أحسب مراكز الفئات

الحل

أ - عدد الفئات = 5

ب - طول الفئة = الحد الأعلى – الحد الأدنى

9-4=5

ت - الحد الأدنى للفئة الرابعة = 19

ث - تكرار الفئة الثانية = 7

ج - النسبة المئوية للأفراد الذين أعمارهم 14 سنة فأكثر

$$\frac{3+4+3}{22}*100=45.45$$

ح - النسبة المئوية للأفراد الذين أعمارهم أقل من 19 سنة

$$\frac{5+7+3}{22}*100=68.181$$

تابع للحل

خ - مركز أي فئة = $\frac{\text{الحد الادنى + الحد الأعلى}}{2}$

مراكز الفئات x	c
6.5	9- 4
11.5	14 - 9
16.5	19 - 14
21.5	24 - 19
26.5	29 - 24

واجب

البيانات التالية تمثل انتاج مصنع أسمنت الجنوب خلال 18 شهر حيث الانتاج بآلاف اللأطنان

12 14 16 10 7 21 19 19 13 24 9 32
26 23 29 28 21 28

المطلوب

كون جدول التوزيع التكراري وأحسب التكرار النسبي

العرض البياني

- الدوائر المجزاءة :

حيث تمثل الدائرة مجموع القيم الكلية للظاهرة ، فيتم تقسيمها إلى قطاعات جزئية وتميز تلك القطاعات عن بعضها إما بألوان مختلفة أو بظلال مختلفة من أجل ضمان الإيضاح . ويستخدم هذا النوع من الرسوم البيانية في الحالات التالية :

1-عندما يكون الهدف منها مقارنة الأجزاء المختلفة بالنسبة للمجموع الكلي لبيانات وصفية(غير كمية)

2-عندما تكون الأجزاء المقارنة قليلة العدد نسبياً .

3- كما يمكن استخدامها أيضاً لتوضيح التطور النسبي لأجزا الظاهرة لفترات زمنية مختلفة

العرض البياني

- الدوائر المجزأة
- نتبع الخطوات التالية لرسم الدوائر :

1- نرسم دائرة بمقياس رسم مناسب .

2- نحسب نسبة كل مجموعة إلى المجموع الكلي (التكرار النسبي) .

3- تقسيم 360 درجة على الفئات حسب نسبة كل فئة

4- يتم تحديد الزوايا لكل فئة حيث

الزاوية = التكرار النسبي * 360

مثال

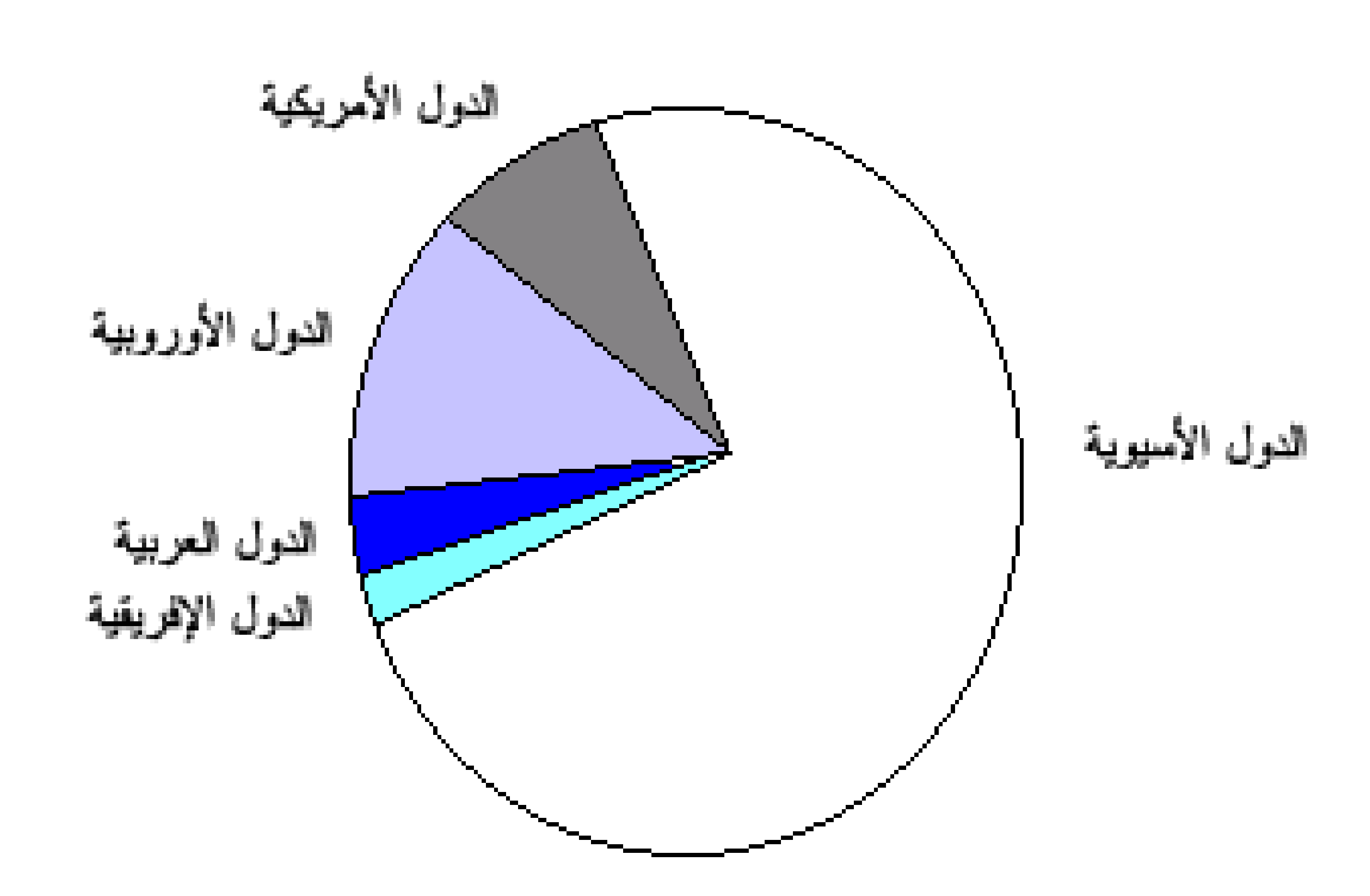
البيانات التالية توضح كمية النفط المصدرة من مجموعة الدول الكمية مأخوذة بآلاف البراميل المطلوب مثل البيانات في شكل دائرة مجزاة

كمية النفط المصدر (بالألف برميل)	مجموعة الدول
2,803	الدول الأفريقية
42,886	الدول الأوروبية
11,552	الدول الأمريكية
158,764	الدول الآسيوية
5,383	الدول العربية

الحل

الزاوية	التكرار النسبي	كمية النفط المصدر (بالألف برميل)	مجموعة الدول
0.0127*360 = 4.572	2.803/221.388 = 0.0127	2,803	الدول الافريقية
69.732	0.1937	42,886	الدول الأوروبية
18.792	0.0522	11,552	الدول الأمريكية
258.156	0.7171	158,764	الدول الآسيوية
8.748	0.0243	5,383	الدول العربية
360	**1**	**221,388**	**المجموع**

الحل



الدول الأمريكية
الدول الأوروبية
الدول الأسيوية
الدول العربية
الدول الإفريقية

مثال

أعرض بيانات الجدول التالي في دائرة مجزأة

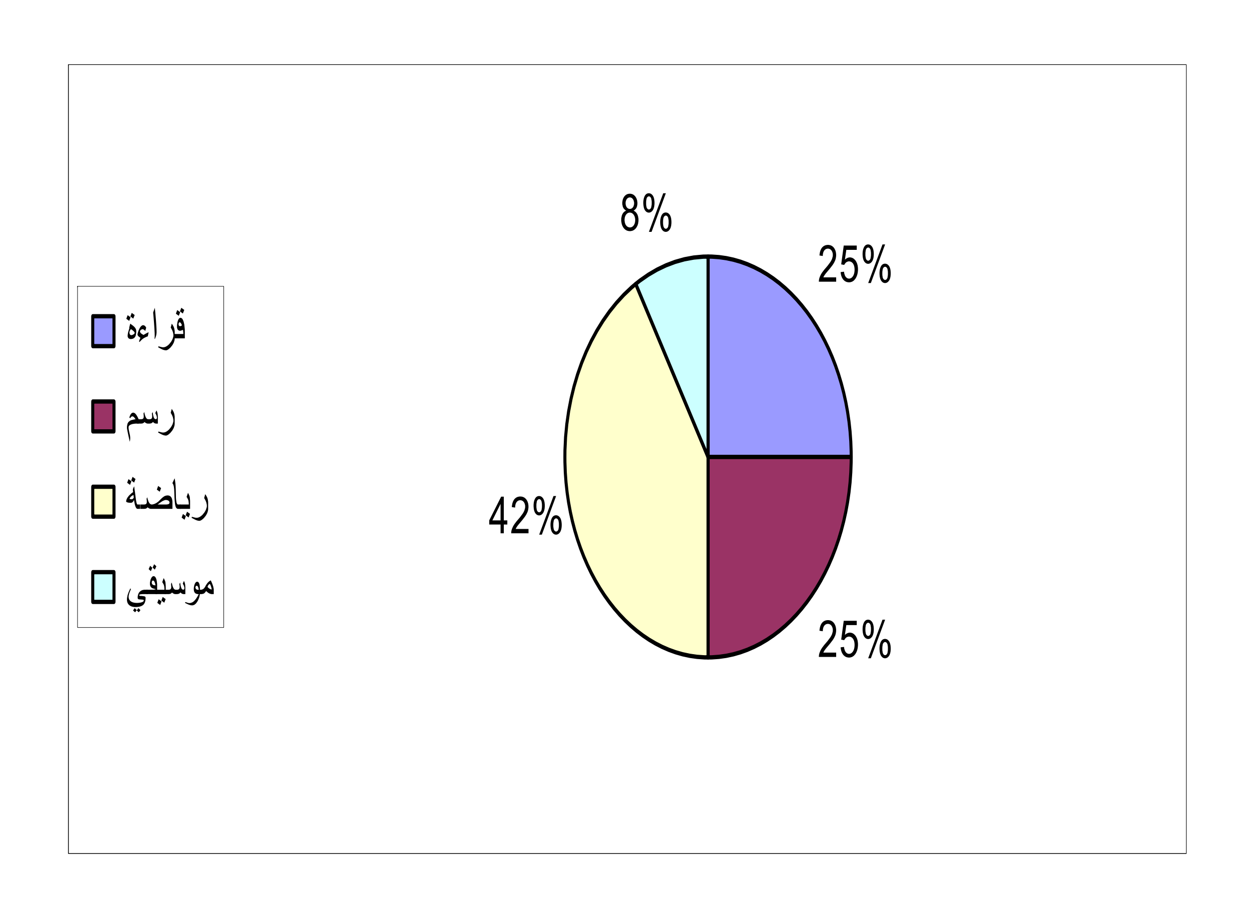
f (ك)	c (ف)
3	قراءة
3	رسم
5	رياضة
1	موسيقي

الحل

نحسب زاوية كل قطاع ثم نرسم الدائرة

الفئات (ف)	التكرارات f (ك)	التكرار النسبي	الزاوية
قراءة	3	3/12=0.25	90
رسم	3	0.25	90
رياضة	5	0.42	151.2
موسيقي	1	0.08	28.8

الرسم



المدرج التكراري

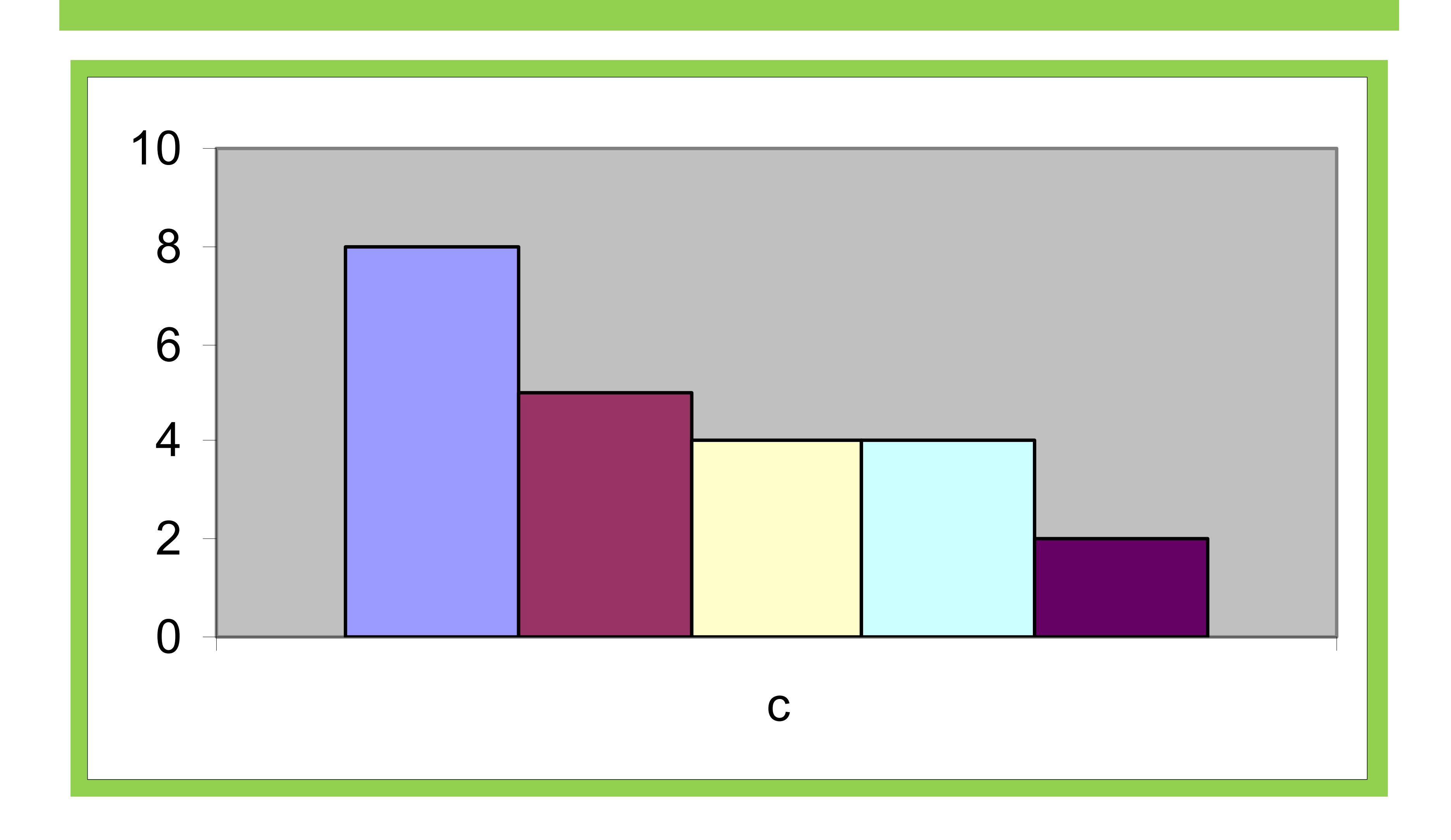
يتكون من أعمدة ولكنها أعمدة متجاورة ويكون من الأفضل معرفة شكل المدرج في حالة المتغيرات المتصلة فإذا تساوت اطوال الفئات حيث يمثل طول الفئة عرض العامود كما يمثل تكرار كل فئة ارتفاع العمود

مثال : البيانات التالية توضح توزيع العمري لمجتمع سكاني المطلوب توضيح هذه البيانات في شكل مدرج تكراري

تابع المدرج التكراري

f	c
8	- 3
5	- 10
4	- 17
4	- 24
2	38 - 31

الحل



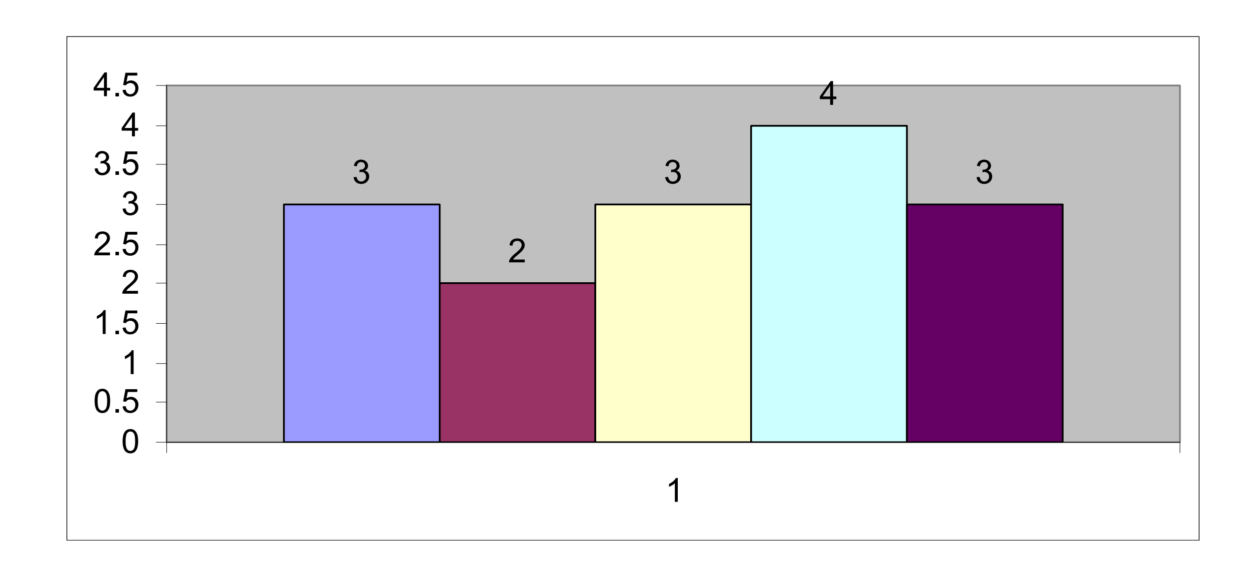
مثال

أعرض البيانات الجدول التالي في صورة مدرج تكراري

الفئات c	التكرار f
-12	3
-14	2
-16	3
-18	4
22-20	3

الحل

الرسم



المضلع التكراري

يرسم المضلع بنفس طريقة المدرج فقط بدلاً عن الفئات نأخذ مراكز الفئات والتكرارات في شكل نقاط نوصل بينها بالمسطرة

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الادنى للفئة} + \text{الحد الأعلى لنفس الفئة}}{2}$$

مثال

وضح بيانات الجدول التالي في شكل مضلع تكراري

F	c
5	8- 4
8	13 - 9
14	18 - 14
4	23 - 19
6	28 - 24

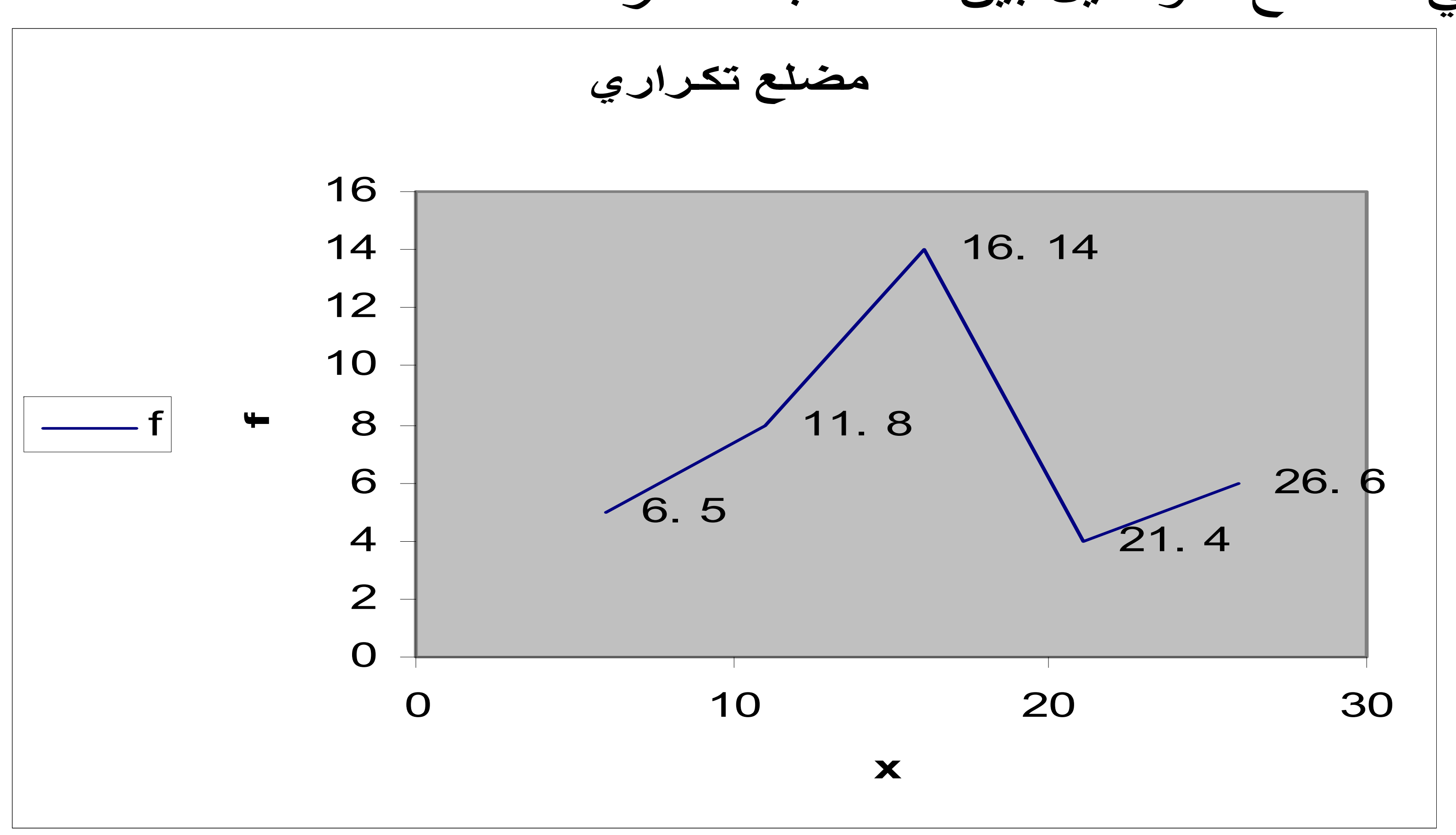
الحل

نحسب مركز كل فئة ثم نرسم المضلع بأخذ مراكز الفئات مع التكرار

x مراكز الفئات	F	c
4+8/2 = 6	5	8 - 4
11	8	13 - 9
16	14	18 - 14
21	4	23 - 19
26	6	28 - 24

تابع للحل

في المضلع التوصيل بين النقاط بالمسطرة



مثال

مستخدما البيانات التالية ارسم مضلع تكراري

F	C
8	8-6
6	13-9
14	18-14
4	21-19
6	28-22

الحل

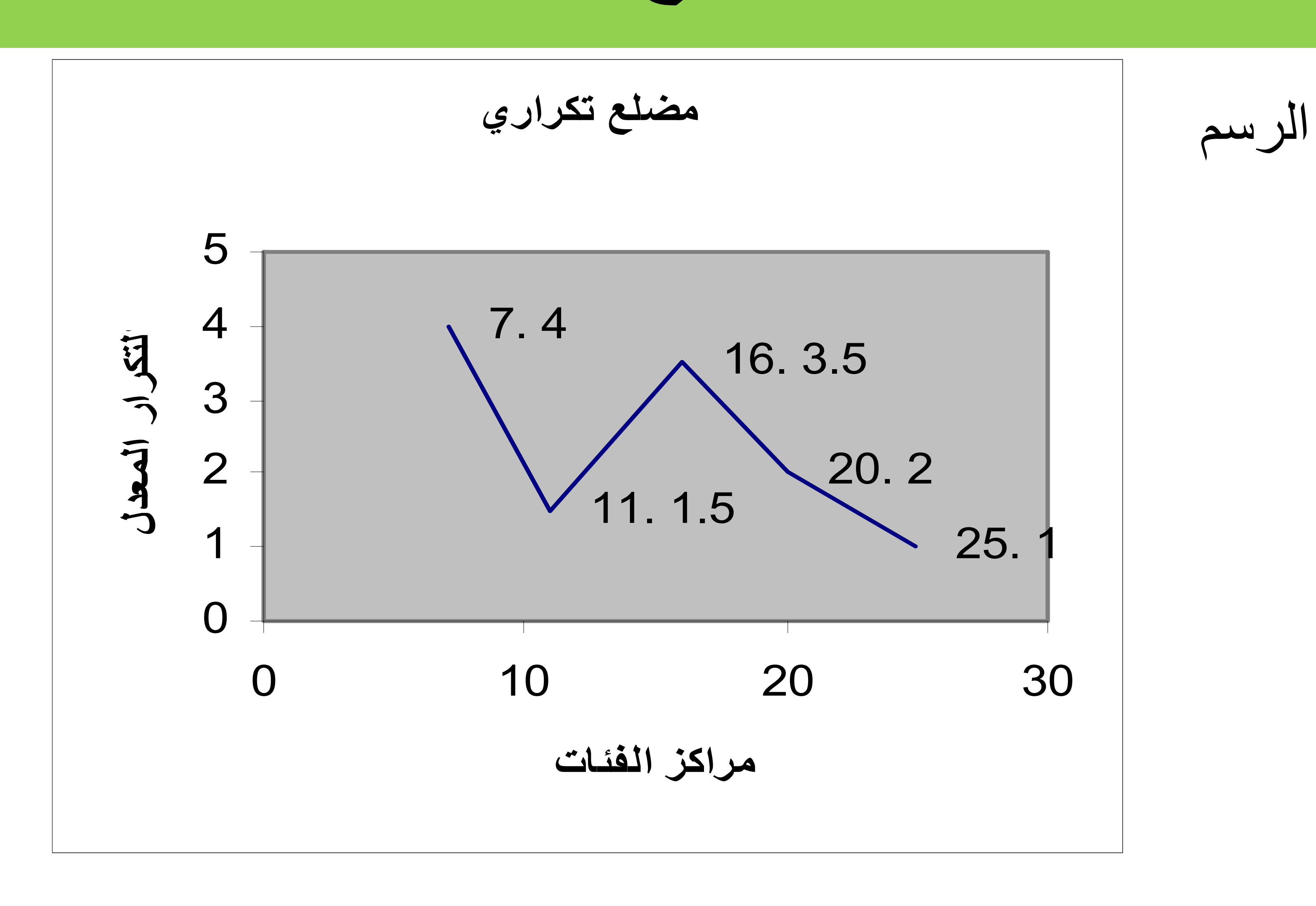
الجدول غير منتظم للرسم نأخذ التكرار المعدل و مراكز الفئات

التكرار المعدل=التكرار/طول الفئة

X	التكرار المعدل r	F	C
7	4	8	8-6
11	1.5	6	13-9
16	3.5	14	18-14
20	2	4	21-19
25	1	6	28-22

تابع للحل

الرسم



واجبات

1- البيانات التالية توضح تقديرات 21 طالب في مادة الاحصاء

A C B+ C B D+ A C F D C+ D A+ B B A C F C A C+

المطلوب: كون جدول التوزيع التكراري وأعرض بيانات الجدول في أعمدة بسيطة

2- أعرض بيانات الجدول التالي في صورة مدرج تكراري

التكرار f	الفئات c
3	14-12
2	16-14
3	18-16
4	20-18
3	26-20

واجب

1- مستخدما البيانات التالية ارسم مضلع تكراري

C	F
8-6	8
13-9	6
18-14	14
21-19	4
28-22	6

واجب

2- ارسم مدرج تكراري لبيانات الجدول التالي

F	C
6	3-7
4	8-10
8	11-15
11	16-20
8	21- 25
10	26-30

مقاييس النزعة المركزية

تستخدم مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت لوصف خصائص البيانات

فمقاييس النزعة المركزية تصف مدى تمركز البيانات حول قيمة معينة مما يسمح باستخدام هذه القيمة المركزية لتمثل البيانات ومقاييس النزعة المركزية أنواع منها الوسط الحسابي والوسيط والمنوال وأي منهم يفضل على الآخر في حالات، وبصورة عامة المقياس يكون جيد اذا توفرت فيه كل أو معظم الصفات التالية

أ- أن يأخذ كل المشاهدات في الاعتبار

ب- اذا كان سهل الحساب

ت- ان يكون قابل للحساب الجبري

ث- ان لا يتأثر بالقيم المتطرفة

الوسط الحسابي

- يعرف أيضا بالمتوسط، ويرمز له ب $\overline{X}$ تقرأ x بار

الوسط الحسابي من المفردات:-

- اذا كان لدينا المفردات التالية

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad ....x_n$$

فإن الوسط الحسابي لهذه المفردات = <u>مجموع المفردات</u>

عدد المفردات

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

حيث

$\sum x$ تمثل مجموع المشاهدات أو المفردات

n تمثل عدد المشاهدات

يستخدم الوسط الحسابي في المعايرة كما يستخدم في مقارنة المجموعات اذا كانت متجانسة

مثال

أحسب الوسط الحسابي للبيانات التالية:

1- 21 14 11 8 6

2- 6 19 7 24 22 11 9

الحل

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

-1

$$\frac{6+8+11+14+21}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

-2

$$\frac{9+11+22+24+7+19+6}{7} = \frac{98}{7} = 14$$

مثال

أحسب الوسط الحسابي للبيانات التالية:

1- 4 5 7 3 8 9

2- 5 7 3 8 9 100

ماذا تلاحظ

الحل

1-

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\frac{9+8+3+7+5+4}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

2-

$$\frac{9+8+3+7+5+100}{6} = \frac{132}{6} = 22$$

نلاحظ التغير الكبير في الوسط الحسابي بسبب تغير مفردة واحدة وتعتبر هذه المفردة بعيدة عن بقية المفردات أي شاذة عنها أي ان الوسط الحسابي تأثر بالقيمة الشاذة.

تنبيهات

- لا يشترط ان تكون قيمة الوسط الحسابي موجودة ضمن المشاهدات او المفردات فقد تكون موجودة أو غير موجودة ولكن يجب أن تكون قيمة الوسط الحسابي محصورة بين أصغر وأكبر مفردة
- الفرق بين أي مفردة والوسط الحسابي يسمى بانحراف المفردة عن الوسط ومجموع انحرافات المفردات عن الوسط دائما يساوي صفر أي أن

$$\sum(x_i - \bar{x}) = 0$$

الوسط الحسابي المرجح

في بعض الاحيان تكون هنالك مفردات او مشاهدات أكثر أهمية من غيرها فمثلاً اذا كان لدينا المفردات التالية

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad ....x_m$

وكان لكل منها وزن معين كما يلي

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad ....w_m$ فان الوسط الحسابي يحسب بالقانون

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$$

مثال

البيانات التالية توضح درجات 20 طالب في مادة الإحصاء أحسب متوسط درجات الطلاب

الدرجة	X	50	60	65	75	80
عدد الطلاب	w	8	2	4	4	2

الحل

يحسب الوسط الحسابي كما يلي

w.x	عدد الطلاب w	الدرجة x
400	8	50
120	2	60
260	4	65
300	4	75
160	2	80
1240	20	المجموع

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$$

$$\overline{X} = \frac{1240}{20} = 62$$ درجة

الوسط الحسابي من الجداول التكرارية

يحسب الوسط الحسابي من الجداول التكرارية أو ما يعرف بالبيانات المبوبة بالقاعدة التالية

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

حيث

$\sum fx$ تمثل مجموع حاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات

$\sum f$ تمثل مجموع التكرارات

x تمثل مراكز الفئات

يعتمد هذا القانون على الجداول المنتظمة فقط اما في حالة الغير منتظمة يفضل استخدام التكرار المعدل

مثال

البيانات التالية توضح التوزيع العمري لأسرة مكونة من خمسة عشر فرداً
أحسب متوسط عمر العائلة

الفئات العمرية c	-1	-5	-9	-13	21-17
عدد الافراد f	3	4	3	4	1

الحل

الوسط الحسابي من الجداول يحسب بالقانون

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

f.x	x	f	c
9	3	3	-1
28	7	4	-5
33	11	3	-9
60	15	4	-13
19	19	1	21- 17
149		15	المجموع

$$\overline{X} = \frac{149}{15} = 9.933$$ سنة

مثال

البيانات التالية تمثل انتاج مصنع أسمنت الجنوب خلال 18 شهر حيث الانتاج بآلاف الاطنان أحسب متوسط الانتاج

كمية الانتاج	الشهور
-1	2
-5	4
-9	6
-13	4
21-17	2

الحل

الوسط الحسابي من الجداول يحسب بالقانون

f.x	x	f	c
6	3	2	-1
28	7	4	-5
66	11	6	-9
60	15	4	-13
38	19	2	21-17
198		18	المجموع

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$\overline{X} = \frac{198}{18} = 11$$

طن

مثال

أحسب متوسط البيانات التالية

f	c
5	6-2
4	11-7
6	16-12
3	21-17
2	22-فأكثر

الحل

يجب أولاً اغلاق الجدول بأخذ طول الفئة السابقة حتى نستطيع حساب الوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

f.x	x	f	c
20	4	5	6-2
36	9	4	11-7
84	14	6	16-12
57	19	3	21-17
48	24	2	26-22
245		20	المجموع

$$\overline{X} = \frac{245}{20} = 12.25$$

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

أولاً مزايا الوسط:

- يأخذ كل المشاهدات في الاعتبار
- سهل الحساب
- يفضل الوسط في حالة البيانات المعتدلة وفي حالة عدم وجود قيم متطرفة

ثانياً عيوب الوسط:

- يتأثر بالقيم أو المشاهدات الشاذة أو المتطرفة ويتأثر بعدد الدرجات ويميل للاستقرار كلما كان هذا العدد كبير (100فأكثر)
- لا يمكن حسابه من البيانات النوعية
- لا يمكن حسابه في حالة الجداول المفتوحة

ملحوظة: هنالك طرق اخرى لحساب الوسط الحسابي منها طريقة الوسط الفرضي ومنها طريقة الوسط الفرضي والعامل المشترك

واجب

- أحسب متوسط البيانات التالية

1- 12 15 12 6 4 2 8 6

2-

c	f
8-2	5
15-9	8
22-16	6
29-23	3
36-30	2

واجب

1- البيانات التالية تمثل الانتاج بمئات الأطنان لمزارع بمنطقة الباحة

5 7 8 32 12 4 9 15 6 13

حيث تكررت هذه الانتاجية في 100 مزرعة كما يلي وعلى الترتيب

12 10 11 6 11 14 9 8 14 5

أحسب متوسط الإنتاج

2- البيانات التالية تمثل انتاج أحد المصانع بمدينة جدة خلال 24 شهر حيث الانتاج بآلاف الوحدات أحسب متوسط الانتاج

f	c
5	8-2
8	15-9
6	22-16
3	29-23
2	36-30

الوسيط

- هو القيمة التي تتوسط القيم

الوسيط من المفردات : اذا كان لدينا المفردات التالية

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad \ldots . x_n$

لحساب الوسيط يجب أولاً ترتيب المفردات تصاعديا او تنازليا، فإذا كان عدد المفردات(n) فردي فإن رتبة الوسيط = $\frac{1 + n}{2}$

الوسيط هو المفردة التي تقع وسط المفردات بعد الترتيب

أما اذا كان عدد المفردات زوجي فإنه توجد مفردتين في الوسط رتبة المفردة الأولى 2/n ورتبة الثانية $\frac{n}{2} + 1$ أي التي تليها

والوسيط في هذه الحالة = متوسط المفردتين (مجموع المفردتين على 2) عادة نرمز للوسيط ب M

مثال

- أحسب الوسيط فيما يلي:

1- 6 9 3 7 2

2- 100 6 9 3 2

3- 6 24 18 8 12 4

4- 12 15 12 6 4 2 8 6

5- مقبول جيد راسب ممتاز جيد جدا

الحل

1- أولاً الترتيب 2 3 6 7 9 عددها فردي ثانياً رتبة الوسيط $\frac{n+1}{2}$ $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ المفردة الثالثة ثالثا الوسيط 6

2- الترتيب 2 3 6 9 100 رتبة الوسيط $(n+1)/2$

$(5+1)/2$ المفردة الثالثة اذن الوسيط 6 لاحظ ان الوسيط لم يتأثر بالقيمة الشاذة 100

3- الترتيب 24 18 12 8 6 4 عددها زوجي رتبة المفردة الاولى $(n/2)$ أي الثالثة ورتبة المفردة الثانية

$(n/2 +1)$ أي التي تليها الرابعة الوسيط = $\left(\frac{8+12}{2}\right) = 10$

تابع للحل

4- الترتيب 15 12 12 8 6 6 4 2 عددها زوجي رتبة المفردة الاولى (n/2) أي الرابعة و التي تليها الخامسة اذن الوسيط = (6+8/2) = 7

5- الترتيب راسب مقبول جيد جيد جدا ممتاز

عددها فردي رتبة الوسيط $\frac{n+1}{2}$ $(\frac{5+1}{2})$ المفردة الثالثة

اذن الوسيط جيد

الوسيط من البيانات المبوبة

يحسب الوسيط من الجداول التكرارية بالقاعدة

$$M = L + \frac{(\frac{n}{2} - c_1)}{(c_2 - c_1)} * h$$

L تمثل الحد الأدنى للفئة الوسيطة

h تمثل طول الفئة الوسيطة

c_1 التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطة

c_2 التكرار المتجمع الصاعد اللاحق للفئة الوسيطة

$\sum f = n$

مثال

البيانات التالية تمثل الدرجات التي أحرزها 100 طالب في امتحان للفيزياء أحسب وسيط الدرجات

-85	-80	-75	-70	-65	-60	-55	-50	-45	-40	c
1	4	13	17	21	18	15	7	3	1	f

الحل

نكون التكراري الصاعد

ترتيب الوسيط هو

$n/2 = 100/2 = 50$

$L = 60 \quad h = 5$

C	التكرار الصاعد f.d
أقل من 40	0
أقل من 45	1
أقل من 50	5
أقل من 55	18
أقل من 60	35
أقل من 65	56
أقل من 70	74
أقل من 75	89
أقل من 80	96
أقل من 85	99
أقل من 90	100

الفئة الوسيطة 65-60

n/2=50

تابع للحل

- من الجدول الصاعد نجد ان $c_2 = 56$ $c_1 = 35$

الوسيط هو:

$$M = L + \frac{(\frac{n}{2} - c_1)}{(c_2 - c_1)} \times h$$

$$M = 60 + \frac{(50 - 35)}{(56 - 35)} \times 5 = 63.57$$ درجة

مثال

البيانات التالية تمثل التوزيع العمري لمجتمع مكون من100 فرد أحسب وسيط العمر لهذا المجتمع

الفئات العمرية c	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-	55-
عدد الافراد f	6	14	16	17	14	19	8	6

الحل

نكون التكراري الصاعد

ترتيب الوسيط هو

$n/2 = 100/2 = 50$

$L = 35 \quad h = 5$

التكرار الصاعد f.d	C
0	أقل من 20
6	أقل من 25
20	أقل من 30
36	أقل من 35
53	أقل من 40
67	أقل من 45
86	أقل من 50
94	أقل من 55
100	أقل من 60

n/2=50

الفئة الوسيطة 35-40

تابع للحل

- من الجدول الصاعد نجد ان $c_2 = 53$ $c_1 = 36$

الوسيط هو:

$$M = L + \frac{(\frac{n}{2} - c_1)}{(c_2 - c_1)} \times h$$

$$M = 35 + \frac{(50 - 36)}{(53 - 36)} \times 5 = 39.11$$ سنة

مثال

أحسب الوسيط لبيانات الجدول التالي والتي تمثل الدخل الشهري ل 20 موظف بالجامعة حيث الدخل بآلاف الريالات

c	f
-2	5
-7	4
-12	6
-17	3
-22فأكثر	2

الحل

نكون التكراري الصاعد

ترتيب الوسيط هو

$n/2 = 20/2 = 10$

$L = 12 \quad h = 5$

التكرار الصاعد f.d	C
0	أقل من 2
5	أقل من 7
9	أقل من 12
15	أقل من 17
18	أقل من 22
20	أقل من 27

n/2=10

الفئة الوسيطة 12-17

تابع للحل

- من الجدول الصاعد نجد ان $c_2 = 15$ $c_1 = 9$ الوسيط هو:

$$M = L + \frac{(\frac{n}{2} - c_1)}{(c_2 - c_1)} \times h$$

$$M = 12 + \frac{(10-9)}{(15-9)} \times 5 = 12.833$$

وسيط الدخل = 12833 ريال

الوسيط من العرض البياني

يمكن ايجاد الوسيط من العرض البياني من خلال نقطة تقاطع المنحنى الصاعد مع المنحنى الهابط

مثال:مستخدما بيانات الجدول التالي وضح الوسيط بيانيا

f	c
12	-20
16	-25
30	-30
25	-35
12	-40
5	-45

الحل

نكون الجدول الصاعد والهابط/

الحدود العليا	التكرار الصاعد fd
أقل من 20	0
أقل من 25	12
أقل من 30	28
أقل من 35	58
أقل من 40	83
أقل من 45	95
أقل من 50	100

الحدود العليا	التكرار الهابط
20 فأكثر	100
25 فأكثر	88
30 فأكثر	72
35 فأكثر	42
40 فأكثر	17
45 فأكثر	5
50 فأكثر	0

وسيطة

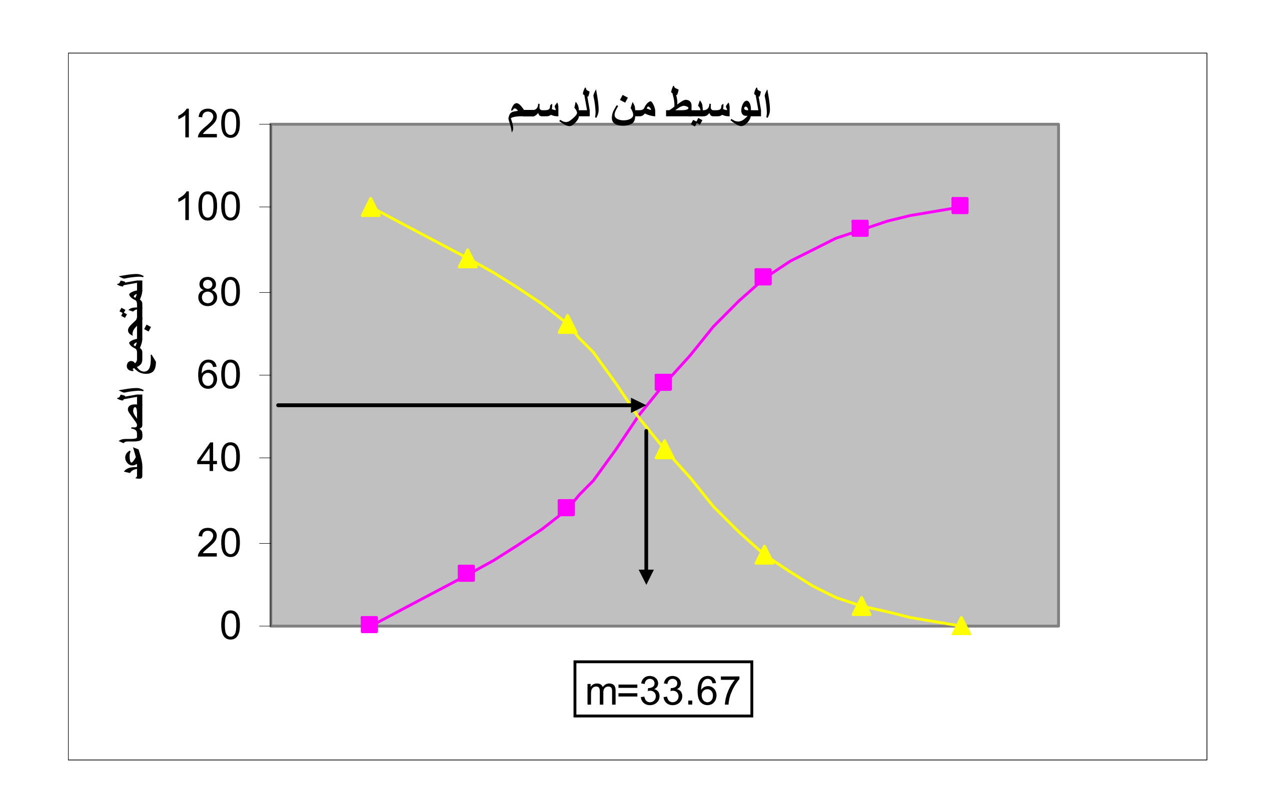
n/2

الفئة الوسيطة

n/2

الوسيط بيانياً

الرسم



مزايا وعيوب الوسيط

أولا مزايا الوسيط:

- لا يتأثر بالقيم الشاذة
- يمكن حسابه من البيانات النوعية اذا أمكن ترتيبها وكان عددها فردي
- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة
- يفضل استخدام الوسيط للمقارنة والمعايرة وخصوصا عندما يكون التوزيع ملتويا

ثانيا العيوب:

- لا يأخذ كل القيم في الاعتبار
- لا يمكن حسابه من البيانات النوعية اذا كان عددها زوجي

المنوال

المنوال من المفردات: المنوال هو القيمة الأكثر شيوعا أو الأكثر تكراراً ويستخدم المنوال كثير جدا في مجال التسويق

مثال: حدد المنوال فيما يلي

1- 6 2 8 6 1 2 2

2- 3 8 9 8 5 3 7

3- 1 9 11 3 8 7 12

4- أحمد حمد حسين محمد حسن محمد

الحل

1- المنوال هو 2

2- يوجد منوالان هما 3 8

3- لا يوجد منوال

4- المنوال هو محمد

المنوال من الجداول التكرارية

يحسب المنوال والذي يرمز له ب D من البيانات المبوبة بالقاعدة التالية

$$D = L + \frac{\Delta_1}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \times h$$

حيث :

L الحد الادنى للفئة المنوالية

h طول الفئة المنوالية

Δ_1 الفرق بين أكبر تكرار والتكرار السابق له

Δ_2 الفرق بين أكبر تكرار والتكرار اللاحق له

تسمى هذه الطريقة بطريقة بيرسون

مثال

احسب المنوال لبيانات الجدول التالي والتي تمثل الكميات المعروضة والكميات المباعة لمنتجات احدى الشركات في 5مدن حيث الكميات بآلاف الوحدات

المعروضة	المباعة
-2	1
-7	4
-12	8
-17	5
-22فأكثر	4

الحل

- الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار (الفئة الثالثة)

$\Delta_2 = 8-5=3$ $\Delta_1 = 8 -4=4$

h=5 L = 12

$$D = L + \frac{\Delta_1}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \times h$$

$$D = 12 + \frac{4}{(4+3)} \times 5 = 14.857$$

مثال

احسب المنوال لبيانات الجدول التالي

f	c
12	-4
4	-10
8	-16
5	-22
5	28-فأكثر

الحل

- الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار (الفئة الأولى)

$\Delta_2 = 12 - 4 = 8 \quad \Delta_1 = 12 - 0 = 12$

$h = 6 \quad L = 4$

$$D = L + \frac{\Delta_1}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \times h$$

$$D = 4 + \frac{12}{(12 + 8)} \times 6 = 7.6$$

مثال

احسب المنوال لبيانات الجدول التالي

f	C
6	-2
8	-8
15	-12
5	-17
4	24 -22

الحل

الجدول غير منتظم نحسب التكرار المعدل

C	f	r طول الفئة	f d f/r
-2	6	6	1
-8	8	4	2
-12	15	5	3
-17	5	5	1
24 -22	4	2	2

الحل

- الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار في التكرار المعدل (الفئة الثالثة)

$\Delta_2 = 3 - 1 = 2$ $\Delta_1 = 3 - 2 = 1$

$h = 17 - 12 = 5$ $L = 12$

$$D = L + \frac{\Delta_1}{(\Delta_1 + \Delta_2)} \times h$$

$$D = 12 + \frac{1}{(1 + 2)} \times 5 = 13.667$$

المنوال من الرسم البياني

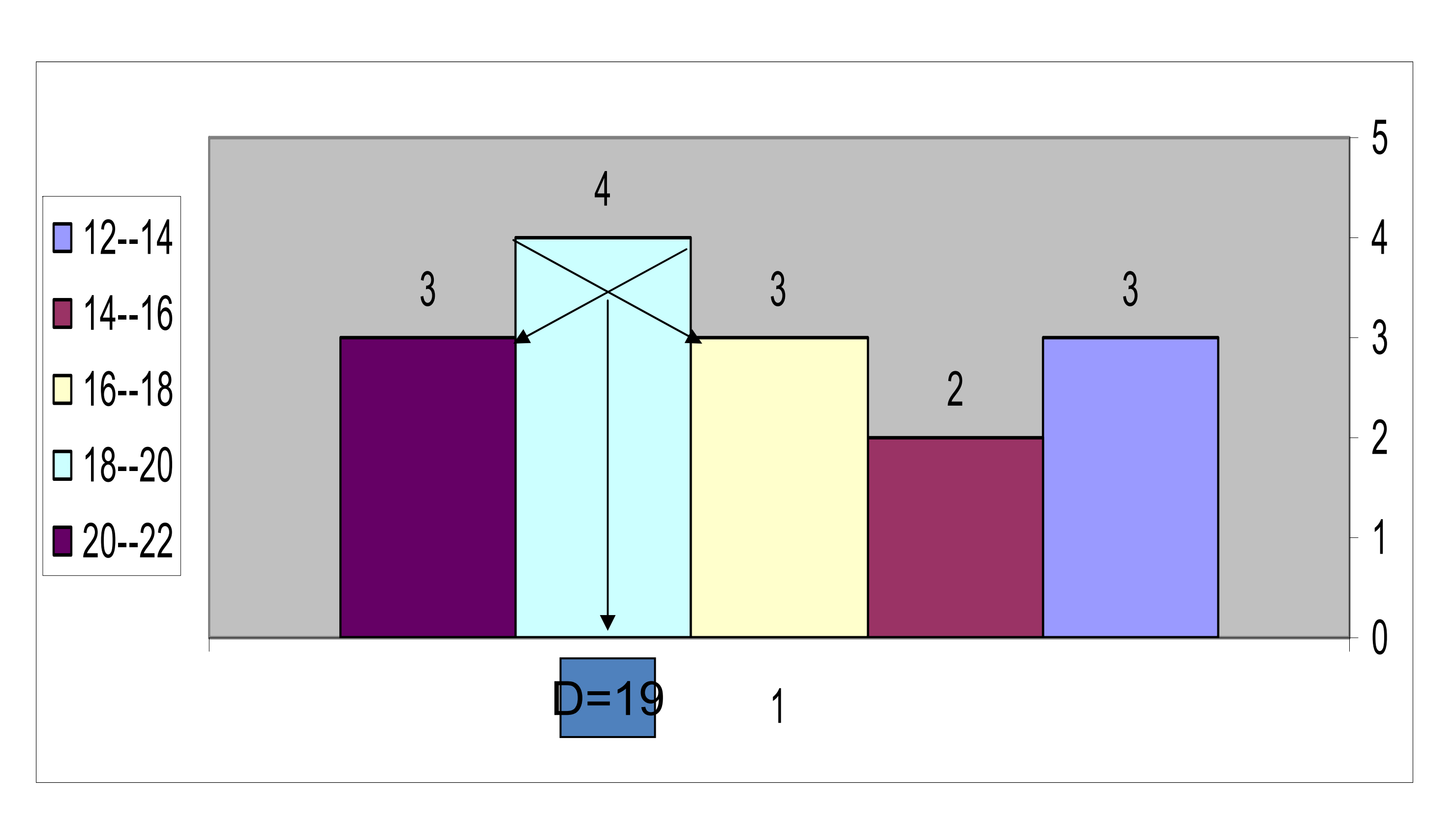
يمكن الحصول على المنوال من المدرج التكراري من خلال الفئة الأكبر تكرار كما في المثال التالي

مثال:مستخدما بيانات الجدول التالي وضح المنوال بيانيا

f	c
3	-12
2	-14
3	-16
4	-18
3	-20

الحل

الفئة المنوالية هي التي لها أكبر تكرار



مزايا وعيوب المنوال

أولاً المزايا

- سهل الحساب
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة أو الشاذة
- يمكن حسابه من البيانات النوعية
- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة

ثانياً العيوب

- لا يأخذ كل المشاهدات في الاعتبار
- قد يكون هنالك منوال أو أكثر من منوال وقد لا يوجد منوال

العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال

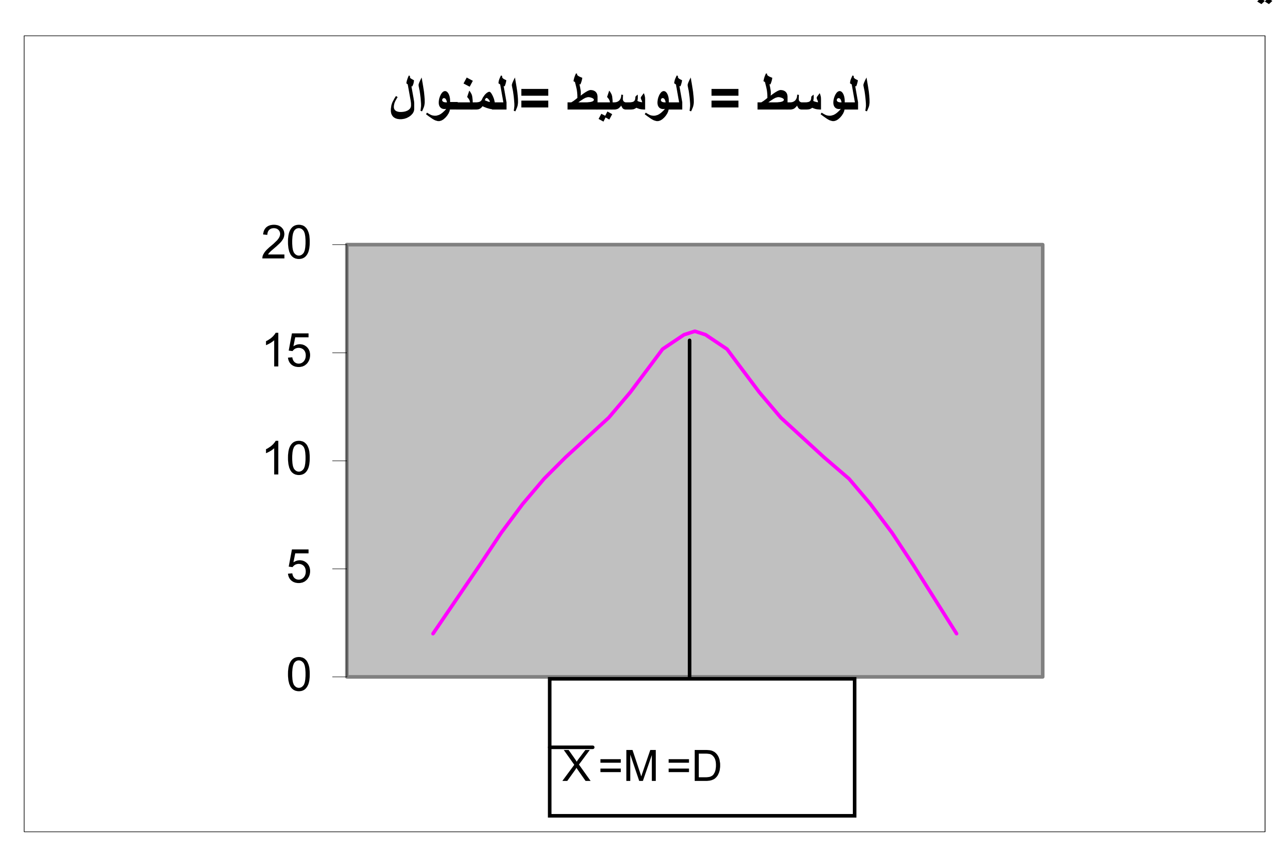
اذا كان التوزيع متماثلا فان $\bar{X} = M = D$

وإذا كان ملتويا جهة اليمين فان $\bar{X} > M > D$ اما وإذا كان ملتويا جهة اليسار فان $\bar{X} < M < D$

في حالة التوزيعات التكرارية القريبة من التماثل فإن العلاقة تعطى ب الوسط الحسابي- المنوال=3(الوسط الحسابي – الوسيط)

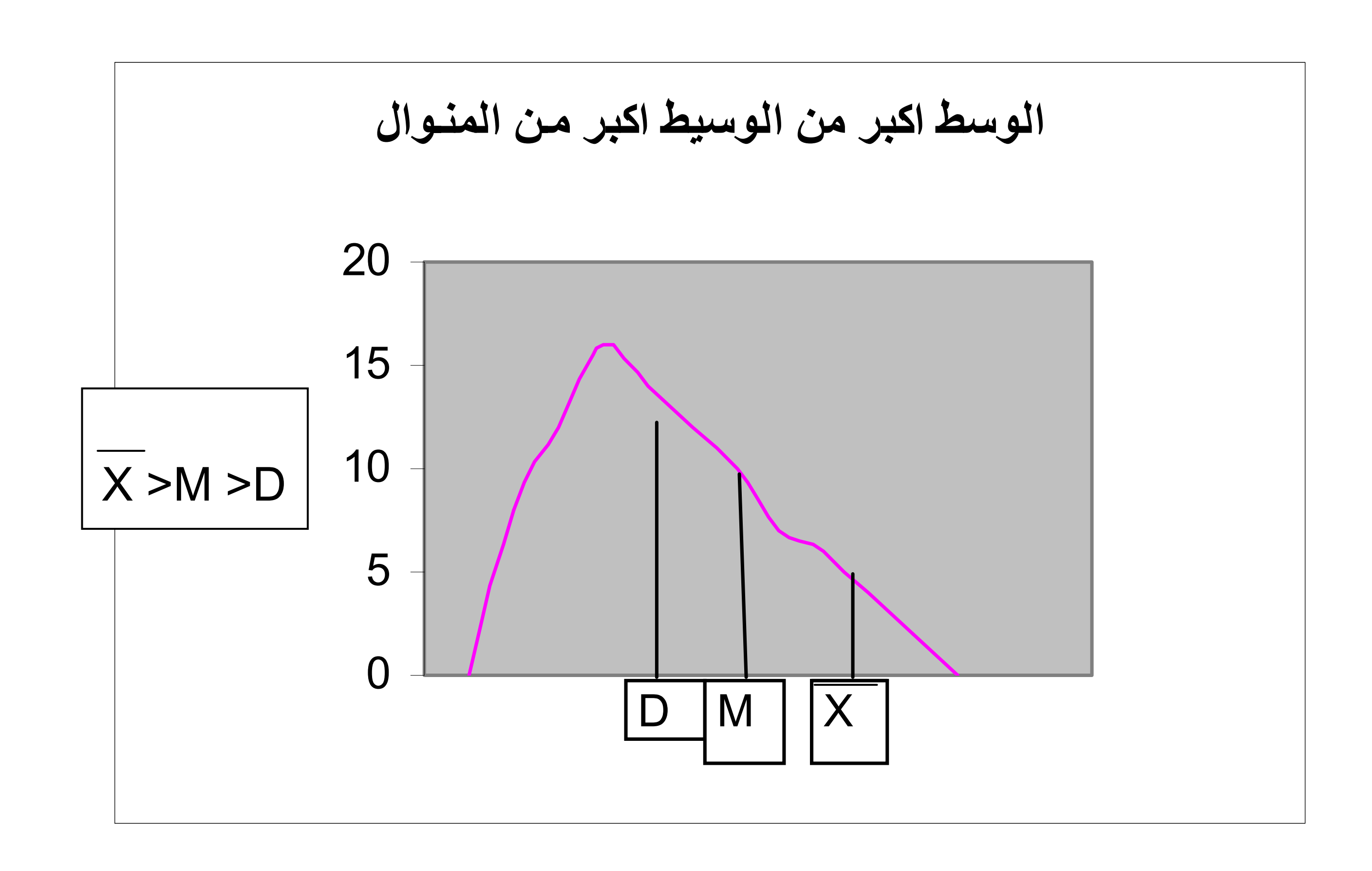
العلاقة بين المتوسطات من خلال الرسم

- في حالة التماثل الوسط = الوسيط = المنوال



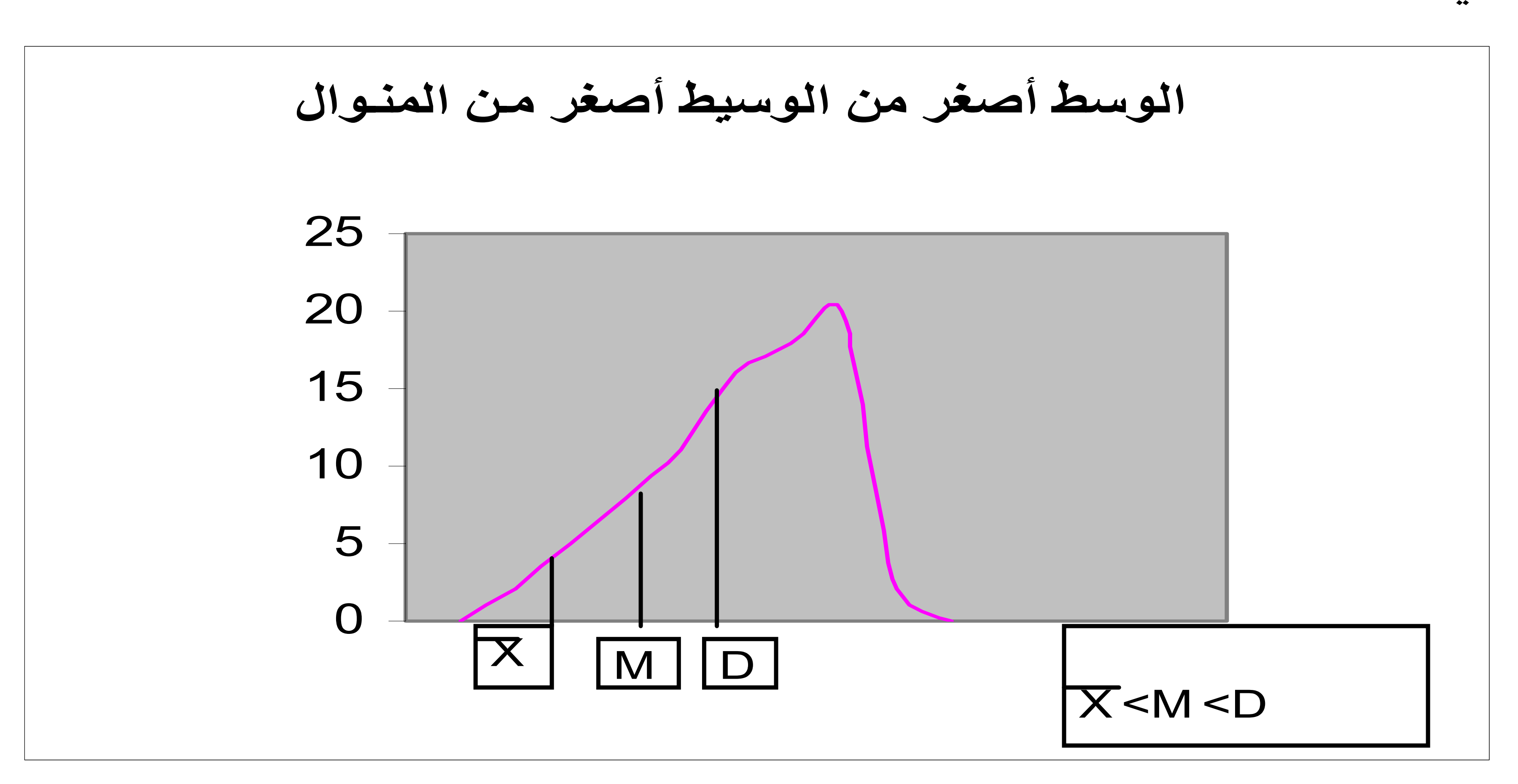
العلاقة بين المتوسطات من خلال الرسم

- التواء نحو اليمين



التواء نحو اليسار

في هذه الحاله يكون الوسط اصغر المقاييس الثلاثة



مثال

اذا كان لدينا توزيع قريب من التوزيع المتماثل وكان وسطه الحسابي 27 ومنواله 31 فما قيمة وسيط هذا التوزيع

الحل

بما أن التوزيع قريب من التوزيع المتماثل فإن

الوسط الحسابي – المنوال = 3(الوسط الحسابي- الوسيط)

27 – 31 = 3(27 – الوسيط)

-4 = 81 – 3الوسيط   -85 = -3 الوسيط

الوسيط =28.333

مثال

اذا كان X متغير يتبع لتوزيع قريب جدا من التوزيع المتماثل أحسب الوسط الحسابي ل x اذا كان وسيطة 12 ومنواله 6

الحل

الوسط الحسابي – المنوال = 3(الوسط الحسابي- الوسيط)

- المنوال =2 الوسط الحسابي – 3 الوسيط

- 6 = 2 الوسط الحسابي – 36

الوسط الحسابي ل x = 15

واجب

احسب الوسط والوسيط والمنوال للتوزيعات التالية ثم علق على شكل المنحنى

f	c
5	-10
10	-20
15	- 30
20	-40
5	-50

f	c
5	-10
10	-20
25	- 30
10	-40
5	-50

f	c
5	- 10
20	-20
15	- 30
10	-40
5	-50

مقاييس التشتت

- في كثير من الأحيان نجد مقاييس النزعة المركزية غير كافية لوصف البيانات فمثلاً اذا كان لدينا المجموعات التالية من المفردات

الاولى 24 24 24 24 24

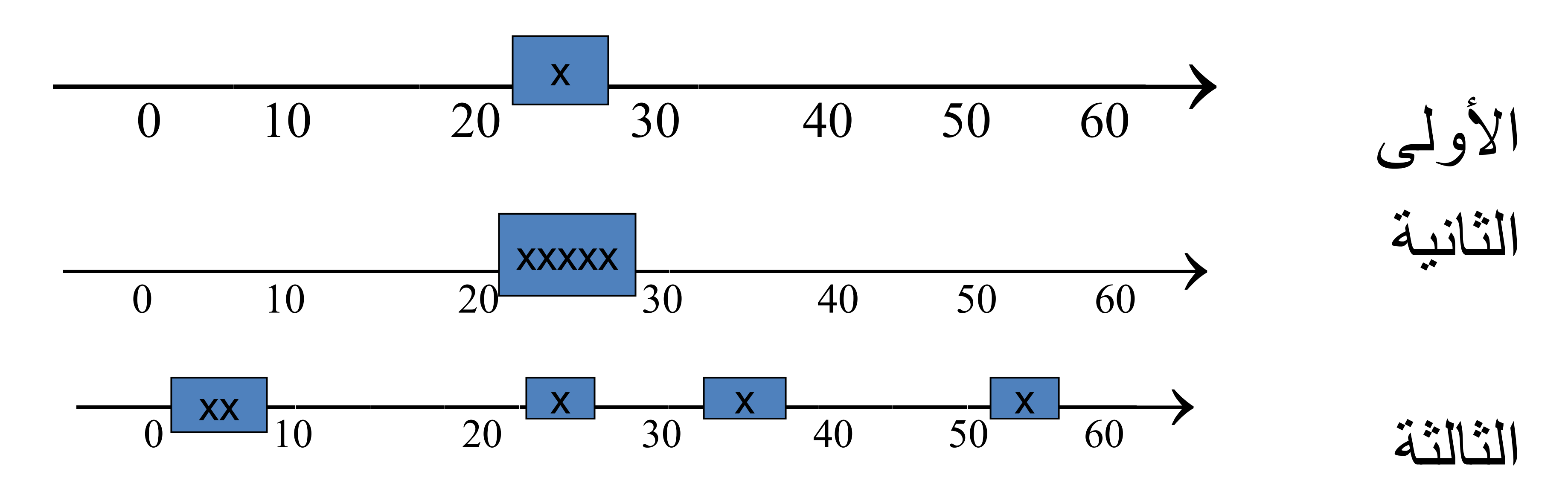
الثانية 20 21 24 26 29

الثالثة 3 8 24 33 52

فإذا حسبنا متوسط المجموعات = 24 وإذا حسبنا وسيط المجموعات ايضا 24 ولكن واضح أن هنالك فرق من حيث مدى تقارب مفردات هذه المجموعات وتباعدها عن بعضها

توضيح

يمكن توضيح ذلك كما يلي



المدى

يعطي فكرة سريعة عن مدى تغير الظاهرة ويرمز له ب R

- المدى من المفردات:

المدى = أكبر مفردة – أصغر مفردة

مثال اذا كان درجات الطلاب في واجب للإحصاء كما يلي

6 8 11 15 16 12 18 5 14 20

أحسب المدى الحل

$R = 20 - 5 = 15$

واجب

احسب المدى فيما يلي

1- 24 24 24 24 24

2- 20 21 24 26 29

3- 3 8 24 33 52

المدى من البيانات المبوبة

يحسب بطريقتين

الاولى عن طريق الفئات:

المدى = الحد الاعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى

الثانية عن طريق مراكز الفئات:

المدى = مركز الفئة الأخيرة – مركز الفئة الاولى

مثال

أحسب المدى لبيانات الجدول التالي

f	c
3	-12
2	-14
3	-16
4	-18
3	-20

الحل

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الادنى للفئة الأولى

22 -12= 10

c	f
-12	3
-14	2
-16	3
-18	4
22 -20	3

مزايا وعيوب المدى

أولا المزايا

- سهولة حسابه
- مقياس يعطي فكرة سريعة عن تفاوت البيانات

ثانياً العيوب

- لا يأخذ كل القيم في الاعتبار وقد تكون احداهما شاذة
- يصعب حسابه في البيانات الوصفية
- يصعب حسابه من الجداول المفتوحة

الانحراف المتوسط

يحسب الانحراف المتوسط من المفردات بالقاعدة

$$M\,D= \frac{\sum\left|x-\bar{x}\right|}{n}$$

حيث n تمثل عدد المفردات وx تمثل المفردات

مثال

- أحسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية

1- 24 24 24 24 24

2- 20 21 24 26 29

3- 3 8 24 33 52

الحل

- نحسب الوسط الحسابي

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

1-

$$\overline{X} = \frac{120}{5} = 24 \qquad MD = \frac{\sum |x - \overline{x}|}{n} = \frac{0}{5} = 0$$

2-

$$\overline{X} = \frac{120}{5} = 24 \qquad MD = \frac{|20-24| + |21-24| + |24-24| + |26-24| + |29-24|}{5} =$$

$$MD = \frac{4+3+0+2+5}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

3-

$$\overline{X} = \frac{120}{5} = 24 \qquad MD = \frac{|3-24| + |8-24| + |24-24| + |33-24| + |52-24|}{5} =$$

$$MD = \frac{21+16+0+9+28}{5} = \frac{74}{5} = 14.8$$

التباين والانحراف المعياري

هو متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط ويختلف التباين للمجتمع والذي يرمز له ب σ^2 وتقرأ سيجما تربيع عن تباين العينة s^2

التباين من المفردات في حالة المجتمع

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2}{N}$$

في حالة العينات

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

اما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين

مثال

اختيرت عينة من 10 مكالمات دولية فكان طول المكالمات بالدقائق كما يلي

10 6 12 15 20 8 4 9 3 13

أحسب التباين والانحراف المعياري لطول المكالمات

الحل

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{13+3+9+4+8+20+15+12+6+10}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

تابع للحل

نحسب تباين العينة

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{(10-10)^2+(6-10)^2+(12-10)^2+(15-10)^2+(20-10)^2+(8-10)^2+(4-10)^2+(9-10)^2+(3-10)^2+(13-10)^2}{9}$$

$$s^2 = \frac{244}{9} = 27.111$$

الانحراف المعياري =

$$s = \sqrt{27.111} = 5.207$$ دقائق

مثال

مجتمع مكون من 10 مفردات أحسب التباين والانحراف المعياري للمجتمع

10 8 12 13 8 15 7 12 16 9

الحل

$$\mu = \frac{\sum x}{N} \qquad = \frac{9+16+12+7+8+15+13+12+8+10}{10} = \frac{110}{10} = 11$$

تابع للحل

نحسب التباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{(9-11)^2 + (16-11)^2 + (12-11)^2 + (7-11)^2 + (15-11)^2 + (8-11)^2 + (13-11)^2 + (12-11)^2 + (8-11)^2 + (10-11)^2}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{86}{10} = 8.6$$

الانحراف المعياري =

$$\sigma = \sqrt{8.6} = 2.933$$

التباين والانحراف المعياري من الجداول

حسب التباين للعينات من البيانات المبوبة بالقاعدة

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i - 1}$$

X تمثل مراكز الفئات

اما الانحراف المعياري للعينة(s) فهو الجذر التربيعي للتباين

مثال

أحسب التباين والانحراف المعياري لبيانات الجدول التالي

f	c
3	-1
4	-5
3	-9
4	-13
1	21- 17

الحل

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = 9.933$$

لحساب التباين لا بد من حساب الوسط الحسابي

$f(X-\overline{X})^2$	$(X-\overline{X})^2$	X- $\overline{X}$	f.x	x	f	c
144.198	48.066	- 6.933	9	3	3	5 -1
34.408	8.602	-2.933	28	7	4	9 -5
3.414	1.138	1.067	33	11	3	13 -9
102.696	25.674	5.067	60	15	4	17-13
82.210	82.210	9.067	19	19	1	21- 17
366.926			149		15	المجموع

تابع للحل

اذن التباين

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i - 1}$$

$$S^2 = \frac{366.926}{14} = 26.209$$

الانحراف المعياري(S) = 5.119

مثال

احسب التباين والانحراف المعيارى لبيانات الجدول التالي

f	c
2	-2
4	-4
6	-6
4	-8
2	12-10

الحل

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = 7$$

لحساب التباين نحسب الوسط الحسابي

$f(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^2$	$X-\bar{X}$	f.x	x	f	c
32	16	-4	6	3	2	-2
16	4	-2	20	5	4	-4
0	0	0	42	7	6	-6
16	4	2	36	9	4	-8
32	16	4	22	11	2	12-10
96			126		18	المجموع

تابع للحل

اذن التباين

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i - 1}$$

$$S^2 = \frac{96}{17} = 5.647$$

الانحراف المعياري(S) =2.376

واجب

البيانات التالية تمثل انتاج مصنع أسمنت الجنوب خلال 18 شهر حيث الانتاج بآلاف الاطنان أحسب الانحراف المعياري للانتاج

كمية الانتاج	الشهور
1-	2
5-	4
9-	6
13-	4
21-17	2

واجب

- أحسب التباين والانحراف المعياري لبيانات الجدول التالي

f	c
3	-12
2	-14
3	-16
4	-18
3	-20

مزايا وعيوب التباين والانحراف المعياري

أولا المزايا:

- لا يتأثر بإضافة أو طرح أو ضرب مقدار ثابت لجميع القيم
- الانحراف المعياري أدق مقاييس التشتت ويعتمد عليه كثيرا
- سهولة حسابه

ثانيا العيوب:

- يتأثر بالقيم الشاذة
- لا يمكن حسابه للبيانات الوصفية
- لا يمكن استخدامه لظاهرتين اذا كان تميزهما مختلف أو وسطهما مختلف (يستخدم معامل الاختلاف $s/\bar{x}*100$)
- للانحراف المعياري أهمية خاصة عن عندما يكون التوزيع متماثل حيث

$(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$ يحوي 68% تقريبا من قيم التوزيع

$(\bar{x}-2s,\bar{x}+2s)$ يحوي 95% تقريبا من قيم التوزيع

$(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$ يحوي كل قيم التوزيع تقريبا (هذا ما يعرف بالقانون التجريبي)

الانحراف الربيعي

- عند تقسيم القيم الى أربعة أجزاء متساوية يوجد ثلاث إحصائيات ترتيبية تسمى بالربيعات وهي

1- الربيع الأول (الادنى) وهو القيمة التي يقل عنها ربع القيم (25% من القيم) ويرمز له ب Q_1

2- الربيع الثاني وهو القيمة التي يقل عنها نصف القيم (50% من القيم) ويرمز له ب Q_2 وهو الوسيط

3- الربيع الثالث (الاعلى) وهو القيمة التي يقل عنها ثلاث أرباع القيم (75% من القيم) ويرمز له ب Q_3

الانحراف الربيعي = $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

الانحراف الربيعي من المفردات

- نرتب المفردات تصاعديا
- نحسب رتبة الربيع الأول (الادنى)بالقاعدة $R_1 = \frac{n+1}{4}$
- ثم نحدد قيمة الربيع الأول Q_1
- نحسب رتبة الربيع الثالث (الأعلى) بالقاعدة $R_3 = \frac{3(n+1)}{4}$
- نحدد قيمة الربيع الثالث Q_3
- نحسب الانحراف الربيعي بالقاعدة $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
- اذا كانت رتبة الربيع كسر نطبق القاعدة

$$Q_i = x_1 + (R_i - L)(x_2 - x_1)$$

x_1 القيمة الأصغر x_2 القيمة الأكبر L رتبة القيمة الأصغر

مثال

أحسب الانحراف الربيعي للبيانات التالية

1- 4 6 2 1 8 12 9

2- 5 9 7 2 14 9 11 20 5

3- 6 12 4 18 12 11 8 9 5 1

الحل

1- نرتب

1 2 4 6 8 9 12

$$R_1 = \frac{n+1}{4} \qquad R_1 = \frac{7+1}{4} = 2$$

$Q_1=2$

$$R_3 = \frac{3(n+1)}{4} \qquad R_3 = \frac{3(7+1)}{4} = 6$$

$Q_3=9$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q = \frac{9-2}{2} = 3.5$$

الحل

2- نرتب

$$R_1 = \frac{n+1}{4}$$

2 5 5 7 9 9 11 14 20

$$R_1 = \frac{9+1}{4} = 2.5$$

القيم	2 5 5 7 9 9 11 14 20
الرتبة	1 2 3 4 5 6 7 8 9
رتبة الربيع	2.5 7.5

$$Q_i = x_1 + (R_i - L)(x_2 - x_1) = 5 + (2.5 - 2)(5 - 5) = 5$$

$$R_3 = \frac{3(n+1)}{4}$$

$$R_3 = \frac{3(9+1)}{4} = 7.5$$

$$Q_i = x_1 + (R_i - L)(x_2 - x_1) = 11 + (7.5 - 7)(14 - 11) = 12.5$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q = \frac{12.5 - 5}{2} = 3.75$$

الحل

3- نرتب

$$R_1 = \frac{n+1}{4}$$

1 4 5 6 8 9 11 12 12 18

$$R_1 = \frac{10+1}{4} = 2.75$$

القيم	1 4 5 6 8 9 11 12 12 18
الرتبة	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
رتبة الربيع	2.75 8.25

$$Q_i = x_1 + (R_i - L)(x_2 - x_1) = 4 + (2.75 - 2)(5 - 4) = 4.75$$

$$R_3 = \frac{3(n+1)}{4}$$

$$R_3 = \frac{3(10+1)}{4} = 8.25$$

$$Q_i = x_1 + (R_i - L)(x_2 - x_1) = 12 + (8.25 - 8)(12 - 12) = 12$$

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad Q = \frac{12 - 4.75}{2} = 3.625$$

العزوم و الإلتواء والتفرطح

- اذا كان لدينا مجموعة البيانات $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad \ldots . x_n$ لكل منها تكرار معين f يعرف العزم المركزي من المرتبة k لهذه المجموعة ب

$$m_k = \frac{\sum (x-\bar{x})^k}{n}$$

اذا كانت البيانات من جداول فان

$$m_k = \frac{\sum f\,(x-\bar{x})^k}{n}$$

فعند $k=1$ فأن $m_1=0$ وعند $k=2$ فأن $m_2=s^2$

- يمكن قياس الالتواء ب

$$sk = \frac{m_3}{s^3}$$

تابع

- واذا بدلنا m3 و s بقيمتيهما نجد

$$sk = \frac{\frac{\sum w(x-\bar{x})^3}{n}}{\left[\sqrt{\frac{\sum w(x-\bar{x})}{n}}\right]^3}$$

- فاذا وجدنا sk=0 يعني أن التوزيع متماثل
- أما اذا كان sk<0 يعني إلتواء نحو اليسار
- أما اذا كان sk>0 يعني إلتواء نحو اليمين

تابع

- يحسب معامل التفرطح والذي يرمز له ب ku بالعلاقة

$$ku = \frac{m_4}{s^4}$$

- أو

$$ku = \frac{n\sum f(x-\bar{x})^4}{\left[\sum f(x-\bar{x})^2\right]^2}$$

- اذا كان ku=3 نقول أن التوزيع معتدل
- اذا كان ku>3 نقول أن التوزيع مدبب
- اذا كان ku<3 نقول أن التوزيع مفرطح

مثال

- أحسب معامل الإلتواء ومعامل التفرطح للبيانات التالية

f	c
10	-10
20	-20
35	-30
23	-40
12	-50

الحل

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = 35.7$$

لحساب الإلتواء لا بد من حساب الوسط الحسابى

$f(X-\overline{X})^4$	$f(X-\overline{X})^3$	$f(X-\overline{X})^2$	$X-\overline{X}$	f.x	x	f	c
1836036.8	-88697.43	4284.9	-20.7	150	15	10	-10
262159.2	-24500.86	2289.8	-10.7	500	25	20	-20
8.404	-12.005	17.15	-0.7	1225	35	35	-30
172051.96	18500,211	1989.27	9.3	1035	45	23	-40
1664985.6	86268.684	4469.88	19.3	660	55	12	-50
3935241.96	-8441.42	13051		3570		100	المجموع

تابع للحل

- ومن الجدول نجد

$$m_3 = \frac{\sum f(x-\overline{x})^3}{n} = \frac{-8441.42}{100} = -84.4142$$

$$s^2 = \frac{\sum f(x-\overline{x})^2}{n} = \frac{13051}{100} = 130.51$$

$$sk = \frac{m_3}{s^3} = \frac{-84.4142}{\left(\sqrt{130.51}\right)^3} = -0.057$$

- إلتوا قليل نحو اليسار

تابع للحل

- لحساب التفرطح

$$ku = \frac{n\sum f(x-\bar{x})^4}{\left[\sum f(x-\bar{x})^2\right]^2}$$

$$ku = \frac{39352496}{\left(\sqrt{130.51}\right)^4} = 0.231$$

- التوزيع مفرطح

الارتباط

يقصد بالارتباط بين متغيرين وجود علاقة بينهما ومدى قوتها، بمعنى انه اذا تغير احدهما زيادة أو نقصان يميل الثاني للتغير في اتجاه معين، فمثلا زيادة الجهد تؤدي لزيادة التيار ونقصان قطعة الثلج تبعا لزيادة الحرارة وكذلك العلاقة بين الطول والوزن

الارتباط انواع ابسط انواعه الارتباط البسيط بين متغيرين أو ظاهرتين

معامل الارتباط

- معامل الارتباط والذي يرمز له ب r يقيس درجة العلاقة بين المتغيرات المختلفة بحيث أكبر قيمة ل r (1) وأقل قيمة ل r (-1)وتفسر العلاقة بين الظاهرتين أو المتغيرين حسب قيمة r
- نوع العلاقة حسب إشارة العدد فالعدد الموجب (+) يوحي بأن العلاقة طردية بينما السالب(-) يفسر العلاقة على انها عكسية
- قوة العلاقة تعتمد على قيمة r اذا كانت r = 0 يكون الارتباط منعدم

اذا كانت r أكبر من 0 وأقل من 0.3 يكون الارتباط ضعيف جدا

اذا وقعت r بين (0.3 و0.5) يكون الارتباط ضعيف

اذا وقعت r بين (0.5 و0.7) يكون الارتباط متوسط

اذا وقعت r بين (0.7 و0.9) يكون الارتباط قوي

اذا وقعت r بين (0.9 وأقل من 1) يكون الارتباط قوي جدا

اذا كانت r = 1 يكون الارتباط تام

معامل ارتباط بيرسون

يحسب معامل ارتباط بيرسون لظاهرتين كميتين بالقاعدة

$$r_{xy} = \frac{n.\sum(x.y) - \sum x \sum y}{\sqrt{(n.\sum(x^2) - (\sum x)^2)(n.\sum(y^2) - (\sum y)^2)}}$$

حيث

r_{xy} تمثل معامل ارتباط بيرسون بين x و y

n عدد المكررات

مثال

البيانات التالية تمثل أطوال وأوزان عدد من الطلاب بكلية العلوم حيث الطول بعشرات السنتمترات والوزن بعشرات الكيلوجرامات هل هنالك علاقة بين الطول والوزن

الطول	12	13	14	15	16	17
الوزن	6	7	8	9	10	11

الحل

لدينا ظاهرتين والبيانات كمية نستخدم معامل ارتباط بيرسون فنسمي الطول x والوزن y

	x	y	x.y	x^2	y^2
	12	6	72	144	36
	13	7	91	169	49
	14	8	112	196	64
	15	9	135	225	81
	16	10	160	256	100
	17	11	187	289	121
Σ	87	51	757	1279	451

تابع للحل

نحسب معامل بيرسون

$$r_{xy}=\frac{n.\sum(x.y)-\sum x\sum y}{\sqrt{(n.\sum(x^2)-(\sum x)^2)(n.\sum(y^2)-(\sum y)^2)}}$$

$$r_{xy}=\frac{6(757)-(87)(51)}{\sqrt{(6(1279)-(87)^2)(6(451)-(51)^2}}=\frac{105}{105}=1$$

علاقة طردية تامة

مثال

أحسب معامل ارتباط بيرسون للبيانات التالية

5	6	7	9	13	14	16	x
3	5	6	8	10	14	10	y

الحل

نكون الجدول كما يلي

	x	y	x.y	x^2	y^2
	16	10	160	256	100
	14	14	196	196	196
	13	10	130	169	100
	9	8	72	81	64
	7	6	42	49	36
	6	5	30	36	25
	5	3	15	25	9
Σ	70	56	645	812	530

تابع للحل

نحسب معامل بيرسون

$$r_{xy} = \frac{n.\sum(x.y) - \sum x \sum y}{\sqrt{(n.\sum(x^2) - (\sum x)^2)(n.\sum(y^2) - (\sum y)^2)}}$$

$$r_{xy} = \frac{7(645) - (70)(56)}{\sqrt{(7(812) - (70)^2)(7(530) - (56)^2)}} = \frac{595}{670.832} = 0.887$$

علاقة طردية قوية

معامل ارتباط الرتب لاسبيرمان

- يستخدم لمعرفة الارتباط لظاهرتين أو متغيرين وصفيين بشرط ان يكونا قابلين للترتيب ويمكن ايجاده للمشاهدات الكمية أيضا ويرمز له ب (r_r) حيث

$$r_r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث

d تمثل فرق الرتب المتناظرة

n عدد القيم أو المفردات

مثال

البيانات التالية تمثل تقديرات 8 طلاب في مادتي الاحصاء والرياضيات
هل هنالك علاقة بين درجة الطلاب في المادتين

الاحصاء	جيد	راسب	مقبول	مقبول مرتفع	جيد جدا	ممتاز	ممتاز مرتفع	جيد مرتفع
الرياضيات	جيد جدا	جيد	راسب	مقبول	ممتاز	مقبول مرتفع	جيد مرتفع	ممتاز مرتفع

الحل

نرتب التقديرات ثم نحصل على فرق الرتب المتناظرة

الاحصاء	الرياضيات	رتب الاحصاء	رتب الرياضيات	d	d^2
جيد	جيد جدا	4	6	-2	4
راسب	جيد	1	4	-3	9
مقبول	راسب	2	1	1	1
مقبول مرتفع	مقبول	3	2	1	1
جيد جدا	ممتاز	6	7	-1	1
ممتاز	مقبول مرتفع	7	3	4	16
ممتاز مرتفع	جيد مرتفع	8	5	3	9
جيد مرتفع	ممتاز مرتفع	5	8	-3	9

المجموع 50

تابع للحل

- نحسب معامل ارتباط الرتب بالقاعدة

$$r_r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_r = 1 - \frac{6(50)}{8(64-1)} = 0.405$$

علاقة طردية ضعيفة

مثال

عقدت جلسة بين شرطة المرور وشرطة الجوازات فكان التمثيل كما يلي
هل هنالك علاقة في التمثيل

شرطة المرور	شرطة الجوازات
عقيد	عميد
ملازم	جندي
عقيد	عميد
عريف	عقيد
ملازم	عميد
عميد	ملازم

الحل

نرتب الفريقين

d^2	d	رتب الجوازات	رتب المرور	شرطة الجوازات	شرطة المرور
0.25	0.5.	2	2.5	عميد	عقيد
1.25	-1.5	6	4.5	جندي	ملازم
0.25	0.5	2	2.5	عميد	عقيد
4	2	4	6	عقيد	عريف
6.25	2.5	2	4.5	عميد	ملازم
16	-4	5	1	ملازم	عميد
28	المجموع				

تابع للحل

- نحسب معامل ارتباط الرتب بالقاعدة

$$r_r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_r = 1 - \frac{6(28)}{6(36-1)} = 0.2$$

علاقة طردية ضعيفة جدا

واجب

1- أحسب معامل الارتباط بين x وy اذا كان

x	10	11	16	9	7	7	5
y	10	14	12	10	6	8	4

2- عقدت جلسة بين ادارة جامعة الباحة وإدارة جامعة ام القرى فكان التمثيل كما يلي،هل هنالك علاقة في التمثيل للإدارتين

جامعة الباحة	موظف	وكيل الجامعة	موظف	عميد كلية	وكيل كلية
جامعة ام القرى	عميد كلية	موظف	عميد كلية	موظف	عميد كلية

الانحدار

- يهتم علم الاحصاء بالدراسات التنبؤية أو المستقبلية
- الانحدار يُعنى بتمثيل العلاقة فإذا وجدت علاقة بين المتغيرات المطلوب دراستها فيمكن تمثيلها بشكل معادلة ومن ثم استخدامها في التنبؤ، وهذه المعادلات قد تكون خطية أو غير خطية والمعادلات الخطية تأخذ اشكالا متعددة وفقا لعدد المتغيرات من جهة ودرجة أو نوع العلاقة من جهة آخرى ومن أبسط هذه الأشكال العلاقة الخطية من الدرجة الأولى بين متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل ويسمى الانحدار في هذه الحالة بالانحدار الخطي البسيط

لوحة الانتشار

الصورة العامة لمعادلة الانحدار الخطي البسيط هي

$$y = \hat{a} + \hat{b}x$$

حيث x يسمي بالمتغير المستقل وهو الذي يؤثر على المتغير التابع y

$\hat{a}$ و $\hat{b}$ تسمى معالم النموذج التي يجب تقديرها

لتقدير هاتين المعلمتين نرصد قيم عشوائية ل x وما يقابلها من y ونرسم النقاط (x,y) على المحورين فنحصل على ما يسمى بلوحة الانتشار وهذه النقاط ومن خلال الرسم نعرف هل العلاقة بينهما خطية أم لا

الانحدار الخطي البسيط

- الصورة العامة لمعادلة الانحدار الخطي البسيط هي

$$y = \hat{a} + \hat{b}x$$

$$\hat{b} = \frac{\sum (xy) - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

حيث x يسمي بالمتغير المستقل وهو الذي يؤثر على المتغير التابع y

$\hat{a}$ و $\hat{b}$ تسمى معالم النموذج التي يجب تقديرها

n عدد المكررات

مثال

- البيانات التالية توضح الجهد والتيار حيث الجهد بالفولت والتيار بالأمبير

الجهد	8	6	3	2	1
التيار	11	10	8	6	5

- المطلوب: أ- وضح شكل الانتشار

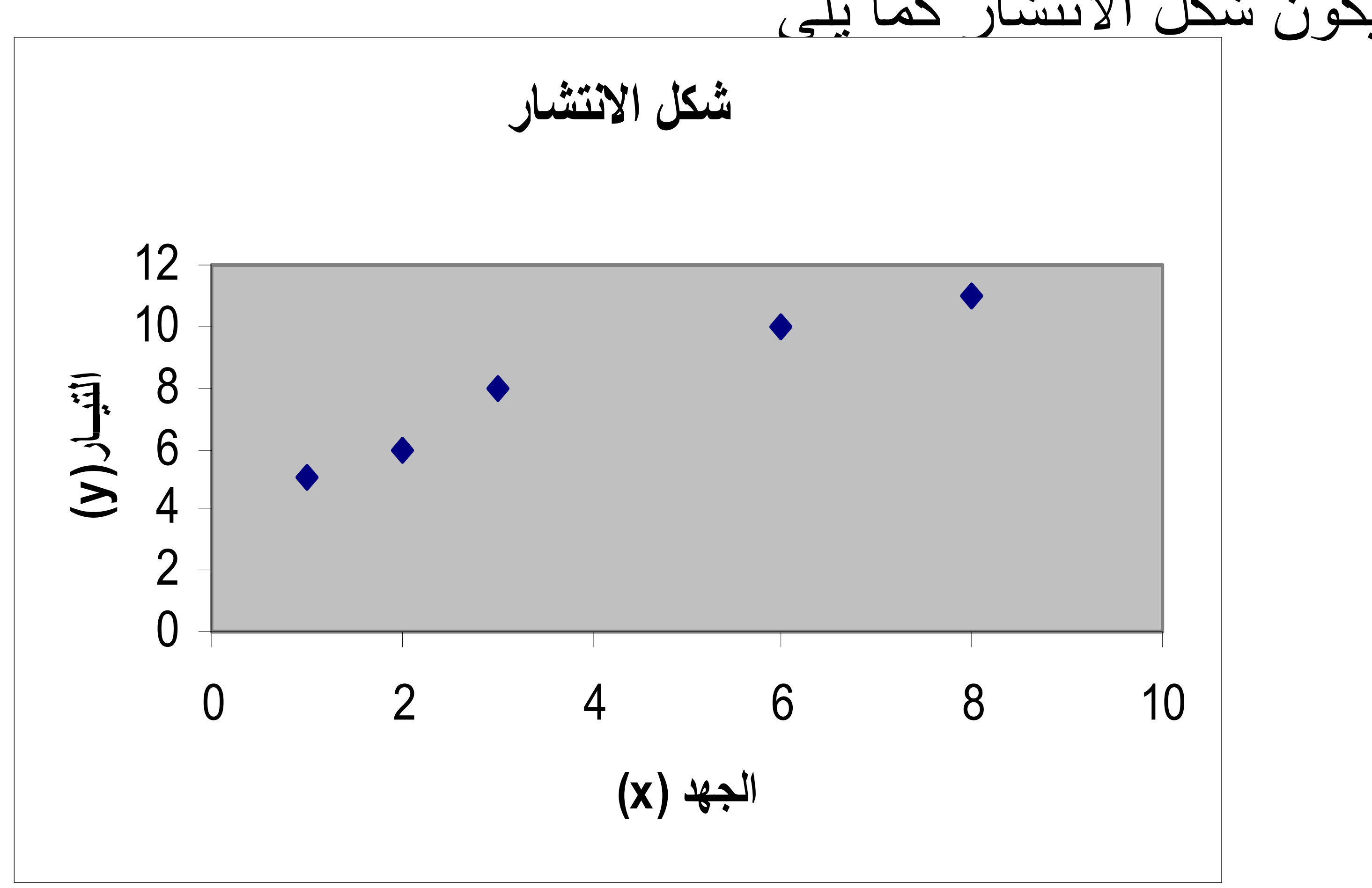
ب- قدر نموذج الانحدار الخطي البسيط

ت- كم يكون الجهد اذا كان التيار 20 أمبير

ث- كم يكون التيار اذا وصل الجهد ل 15 فولت

شكل الانتشار

يكون شكل الانتشار كما يلي



الحل

- لتقدير نموذج الانحدار يجب تقدير قيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بالطبع الجهد هو الذي يؤثر على التيار لذلك نسمي الجهد x والتيار y

x	y	x.y	X^2
8	11	88	64
6	10	60	36
3	8	24	9
2	6	12	4
1	5	5	1
20	40	189	114

المجموع

تابع الحل

- نحسب

$$\bar{x} = 20/5 = 4 \qquad \bar{y} = 40/5 = 8$$

$$\hat{b} = \frac{\sum (xy) - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \qquad \hat{b} = \frac{189 - 5(4)(8)}{114 - 5(4)^2} = \frac{29}{34} = 0.853$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad \hat{a} = 8 - 0.853\,(4) = 4.588$$

أ- النموذج هو

$$y = \hat{a} + \hat{b}x \qquad y = 4.588 + 0.853\,x$$

ب- عندما 20= y نعوض في النموذج $20 = 4.588 + 0.853\,x$

يكون الجهد (x) 18.068 فولت عندما يكون التيار 20 أمبير

ت- عندما 15= x نعوض في النموذج

$y = 4.588 + 0.853\,(15) = 17.383$ يكون التيار 17.383أمبير

مثال

- البيانات التالية توضح الدخل والاستهلاك لمجموعة من الموظفين حيث الدخل والاستهلاك بآلاف الريالات

الدخل	11	8	7	5	3	2
الاستهلاك	5	4	3	3	2	1

- المطلوب: أ- قدر نموذج الانحدار الخطي البسيط

ب- كم يكون الدخل اذا كان الاستهلاك 8ريال

ت- كم يكون الاستهلاك اذا وصل الدخل 15 ريال

الحل

- لتقدير نموذج الانحدار يجب تقدير قيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بالطبع الدخل هو الذي يؤثر على الاستهلاك لذلك نسمي الدخل x والاستهلاك y

x	y	x.y	X^2	
11	5	55	121	
8	4	32	64	
7	3	21	49	
5	3	15	25	
3	2	6	9	
2	1	2	4	
36	18	131	272	المجموع

تابع الحل

- نحسب

$$\bar{x} = 36/6 = 6 \qquad \bar{y} = 18/6 = 3$$

$$\hat{b} = \frac{\sum (xy) - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \qquad \hat{b} = \frac{131 - 6(6)(3)}{272 - 6(6)^2} = \frac{23}{56} = 0.411$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad \hat{a} = 3 - 0.411(6) = 0.534$$

أ- النموذج هو

$$y = \hat{a} + \hat{b}x \qquad y = 0.534 + 0.411x$$

ب- عندما 8= y نعوض في النموذج

$$8 = 0.534 + 0.411x$$

يكون الدخل (x) 18.1655 ريال اذا كان الاستهلاك 8

ت- عندما 15= x نعوض في النموذج

$$y = 0.534 + 0.411(15) = 6.699$$

يكون الاستهلاك 6.699 ريال

واجب

اذا كان

12	11	10	8	7	6	2	x
13	8	10	6	5	4	3	y

أجب عما يلي

1- قدر نموذج الانحدار الخطي البسيط

2- كم تكون x اذا كانت y 18

3- كم تكون y اذا كانت x 15

الأرقام القياسية

- الرقم القياسي هو مقياس إحصائي يوضح التغيرات التي تطرأ على ظاهرة أو مجموعة ظواهر لها خاصية واحدة كالزمان أو المكان
- لاستخدام الرقم القياسي يجب تحديد سنة (فترة) تسمى سنة الأساس أو تحديد منطقة تسمى منطقة الأساس ويجب أن تكون سنة الأساس وكذلك مكان الأساس مستقرة وبعيدة عن الشذوذ

نظرية الاحتمالات

- **مقدمة:**
- تلعب الاحتمالات دور هاما في الحياة اليومية وفي كثير من العلوم
- تستخدم الاحتمالات في قياس عدم التأكد لقرارات في ظل معلومات ناقصة مثلا:

1- الغي رحلة خارجية بعد ان تم الترتيب لها بسبب احتمال رداءة الجو احتمال كبير

2- إهمال طالب دراسة جزء صغير من المقرر لان احتمال ان يأتي فيه سؤال احتمال ضعيف

3- احتمال ارتفاع درجة أو احتمال فوز فريق

- احيانا تجدنا نعبر عنها بتقدير رقمي كأن نقول ان احتمال سقوط الامطار غدا 60% واحتمال فوز فريق 80%
- وعلي كل فان القيم الرقمية للاحتمالات لا تستند علي قاعدة أو اساس رياضي ولكن قد تعتمد على احداث وخبرات ماضية

بدأت دراسة الاحتمالات في القرن السابع عشر علي موائد القمار في العاب الحظ وبظهور العالم الفرنسي باسكال وأول من نشر كتاب عن الاحتمالات العالم السويسري برنولي عام 1713م وفي عام 1813 نشر العالم لابلاس كتابا عن نظرية الاحتمالات.

التجربة العشوائية

- هي كل إجراء نعلم مسبقاً كل النتائج الممكنة منه وإن كنا لا نستطيع ان نتنبأ بأي منه سيتحقق فعلاً
- التجارب نوعان:

1- تجارب محددة أو مؤكدة : بمعنى اذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فمن المؤكد ملاحظة نفس النتائج.

2- تجارب عشوائية: وهي التي يتحكم عامل الصدفة في ظهور نتائجها بمعني اذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فربما تختلف النتائج وبالتالي لا يمكن التنبؤ بالنتائج مثل رمي زهرة النرد ونوع المولود.

- الاحتمالات هي ذلك الفرع من الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية

فراغ العينة

- هو كل النتائج الممكنة من التجربة العشوائية ويرمز له بالرمز (S)
- مثال :كون فراغ العينة لرمي قطعة نقود 1- مرة واحدة 2- مرتين 3- ثلاث مرات

مثال

مثال كون فراغ العينة عند القي زهرا نرد مره واحدة ومرتين

الحل

1- فراغ العينة S={1,2,3,4,5,6}

2- فراغ العينة

$$S = \begin{pmatrix} (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) \\ (2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) \\ (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6) \\ (5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6) \\ (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \end{pmatrix}$$

الحدث

- في بعض الاحيان يكون الاهتمام بجزء من فراغ العينة وليس بكل فراغ العينة.
- الحدث هو أي مجموعة جزئية من فراغ العينة ويرمز له بالرمز(E) أو أي حرف آخر على ان يكون من الأحرف الكبيرة (كبتل)

الحدث المستحيل والحدث المؤكد

- اذا كان الحدث (E)واقع خارج نطاق فراغ العينة (S)يسمي حدث مستحيل ويرمز للحدث المستحيل بالرمز(Φ)مثلاً الحصول على الصورة ثلاث مرات عند رمي قطعة النقود مرة واحدة
- اذا شمل الحدث كل فراغ العينة اي اذا كان (E) = (S) يسمي الحدث بالحدث المؤكد

العمليات على الأحداث

- اذا كان E_1 حدث في S فإن $\overline{E_1}$ هي الحدث المكون من عناصر S والتي لا تنتمي الي E_1 وتسمي مكملة الحدث E_1
- اذا كان E_1 و E_2 حدثين في S فإن

1- ($E_1 \cup E_2$) حدث مكون من عناصر E_1 و E_2 وترمز لوقوع E_1 أو E_2 أو كليهما

2- ($E_1 \cap E_2$) حدث مكون من العناصر المشتركة بين E_1 و E_2 وترمز لوقوع الحدثين E_1 و E_2 معاً

مثال :القيت زهرة نرد مرة واحدة فإذا كان لدينا الاحداث التالية

$E_2=\{5,6\}$ $E_1=\{2,4,6\}$

$E_4= \{1,3,5\}$ $E_3=\{3,6\}$

أوجد

1- $\overline{E_3}$ 2- $E_1 \cap E_3$

- 3- $E_1 \cap E_2$ 4- $E_1 \cup E_4$

التعريف الكلاسيكي للاحتمال

- يقوم التعريف الكلاسيكي للاحتمال على مفهوم النتائج المتكافئة للفرص أي ان الاحداث لها نفس الفرص في الظهور
- قاعدة:- الاحتمال للحدث P(E)

$$P(E) = \frac{\text{عدد الطرق المواتية للحدث}}{\text{عدد جميع الطرق الممكنة}} = \frac{h}{n}$$

يعرف احتمال عدم حدوث الحدث (يسمي الفشل)ويرمز له بالرمز $P(\bar{E})$ أو q

$$P(\bar{E})+P(E)=1 \qquad q = 1-P(E)$$

$$0 \le P(E) \le 1$$

اذا كان الحدث مؤكد فان احتماله = 1 واذا كان مستحيل فان احتماله = صفر

مثال

- معمل به 10اجهزة (IBM) و 5 أجهزة (LG) و 7 اجهزة (FLAT) سحب منه جهاز واحد أوجد احتمال انه
- 1- (IBM) 2- (LG) 3- (FLAT)

الحل

n = 22

1- p(1BM) = 10/22 = 0.455

2- P(LG) = 5/22=0.227

3- P(FLAT) = 7/22=0.318

مثال

- صندوق به 5 كرات حمراء 7 كرات زرقاء 3كرات بيضاء 8 كرات سوداء سحبت منه كره ما هو احتمال ان تكون :

1- بيضاء 2- سوداء 3- زرقاء

الحل

$n=23$

أ- احتمال الكرة بيضاء=

$3/23=0.1304$

ب- احتمال سوداء

$8/23=0.3478$

ت- احتمال الكرة زرقاء=

$7/23=0.3043$

مثال

- القي زهرا نرد مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على المجموع

أ- يساوي 10 ب- أكبر من 9 ج- أقل من أو يساوي 4

د- أكبر من 3 و- على الأقل 2

الحل

- فراغ العينه هو

$$S = \begin{pmatrix} \cancel{(1,1)}\cancel{(1,2)}(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) \\ \cancel{(2,1)}(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) \\ (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6) \\ (5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6) \\ (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \end{pmatrix}$$

تابع للحل

أ- احتمال المجموع 10 {(4,6)(5,5)(6,4)}

احتمال المجموع 10 3/36=0.0833

ب- المجموع أكبر من 9 {(4,6)(5,5)(5,6)(6,4)(6,5)(6,6)}

احتمال المجموع أكبر من 9 6/36=0.1667

ج- أقل من أو يساوي 4

{(1,1)(1,2)(1,3)(2,1)(2,2)(3,1)}

احتمال المجموع أقل من او يساوي 4 6/36=0.1667

د- E تمثل المجموع أكبر من 3 فان $\bar{E}$ المجموع أقل من او يساوي 3

$\bar{E}=\{(1,1)(1,2)(2,1)\}$ $P(\bar{E})=3/36=0.0833$

اذن $P(E)=1-P(\bar{E})=1-0.0833=0.9167$

و- E تمثل المجموع على الأقل 2 حدث مؤكد احتمال الحدث المؤكد دائما واحد

مثال

- القيت قطعة نقود مرتين احسب احتمال الحصول علي صورة مرة واحدة على الأقل

الحل

نرمز للصورة ب H وللكتابة ب T

S={(H,H)(H,T)(T,H)(T,T)}

E تمثل ظهور الصورة مرة واحدة على الاقل

E ={(H,H)(H,T)(T,H)}

$P(E \geq 1) = \frac{3}{4} = 0.75$

الفراغ الاحتمالي الحدث

لكل حدث احتمال وبما ان الحدث جزء من فراغ العينة فان مجموع الاحتمالات الجزئية يساوي واحد أي اذا كان $S=\{s_1,s_2,s_3....s_n\}$ فان الفراغ الاحتمالي المصاحب هو $P\{p_1,p_2,p_3...p_n\}$ ويجب ان يتحقق الشرطين التاليين

1- $p_i \geq 0$ 2- $\sum p_i=1$

مثال

- صممت قطعة نقود بحيث تكون فرصة ظهور الصورة ضعف فرصة ظهور الكتابة ،القيت هذه القطعة مرة واحدة اكتب فراغ العينة واحتمال كل حدث في فراغ العينة

الحل

نرمز للصورة ب H وللكتابة ب T

فراغ العينة هو $S=\{H,T\}$

$P(H)=2a$ $P(T)=a$

$a=1/3$ $3a=1$ $a+2a=1$

$P(H)=2/3$ $P(T)=1/3$

فراغ الاحتمال

في بعض الحالات تكون عملية الحصر للعناصر صعبة أو مستحيلة، على أي حال فانه في حالة الفراغات المتساوية الاحتمال نجد المشكلة محصورة في معرفة عدد عناصر فراغ العينة S وعدد عناصر كل حدث ونعتمد في ذلك على قوانين فمثلا عدد الطرق التي يمكن بها اختيار r من الأشياء من بين n من الأشياء نحسب ب

$$\binom{n}{r} = c_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- حيث

n!=n(n-1)(n-2)….(n-n)

0!=1   1!=1

مثال

بكم طريقة يمكن اختيار 3 رجال من بين 7 رجال

الحل

عدد الطرق هو

$$c_r^n = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 * 6 * 5}{3 * 2 * 1} = 35$$

مثال

ما هو عدد الطرق التي يمكن بها تكوين بعثة مكونة من 3 رجال وامرأتين من بين 6 رجال و5 نساء

الحل

عدد طرق اختيار الرجال هو

$$c_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 * 5 * 4}{3 * 2 * 1} = 20$$

عدد طرق اختيار النساء هو

$$c_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 * 4}{2 * 1} = 10$$

بالتالي فان عدد طرق تكوين البعثة هو 10*20 = 200

مثال

- صندوق به 5 كرات بيضاء و4 كرات حمراء اختيرت منه كرتان معا احسب احتمال ان تكون الكرتان

أ- بيضاء ب- واحدة بيضاء والأخرى حمراء

الحل

- عدد عناصر فراغ العينة هو

N(S)= $c_r^n = c_2^9 = \frac{9*8}{2} = 36$

أ- نفرض أن A تمثل حدث ان الكرتين بلون أبيض

$$N(A) = c_r^n = c_2^5 = 10$$

وبالتالي فان

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{10}{36} = 0.2778$$

تابع للحل

ب- نفرض أن B تمثل حدث اختيار الكرتان واحدة بيضاء وحمراء

$$N(B) = c_1^5 * c_1^4 = 5 * 4 = 20$$

وبالتالي

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{20}{36} = 0.5556$$

مثال

- صندوق به 20 تفاحة منها 5 تالفة اختيرت منه 3 تفاحات احسب احتمال ان يكون أ- جميعها تالفة   ب- اثنان منها تالفتان

الحل

عدد عناصر فراغ العينة N(S) هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار 3 تفاحات

$$c_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

N(S)= $c_r^n = c_3^{20} = \frac{20*19*18}{3*2} = 1140$

أ- نفرض أن A تمثل حدث ان الثلاث تفاحات تالفة

$$N(A) = c_r^n = c_3^5 = 10$$

وبالتالي فان $P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{10}{1140} = 0.0088$

تابع للحل

ب- نفرض أن B تمثل حدث اختيار التفاحتان تلفتان والثالثة جيدة

$$N(B) = c_2^5 * c_1^{15} = 10*15 = 150$$

وبالتالي

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{150}{1140} = 0.1316$$

التعريف التجريبي للاحتمال

- هذا التعريف لا يشترط تساوي الفرص ولكنه مبني علي اساس اجراء التجربة عدد كبير جداً من المرات (مثلاً لا يمكن تساوي الفرص للثلاثة أوجه عند علبة الكبريت فاذا اعطينا الوجه الاصغر فرصة يكون للوجه الاوسط ضعفها وللوجه الاكبر ثلاث اضعافها) ،فإذا كان عدد مرات اجراء التجربة تحت نفس الظروف هو n وكان عدد المرات التي لوحظ فيها حدث معين هو m فان احتمال الحدث A هو

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

$\frac{m}{n}$ التكرار النسبي للحدث A

n عدد غير محدود من المرات تحت نفس الظرف

مثال

اجرى طبيب 500 عملية نجح منها 480 عملية فما هو احتمال فشل عملية يجريها الطبيب ؟

الحل

افرض A ترمز الي الحدث نجاح العملية

n عدد مرات اجراء العملية

m عدد مرات نجاح العملية

$n = 500 \qquad m = 480 \qquad P(A) = m / n = 480/500 = 0,96$

احتمال الفشل هو

$P(\bar{A}) = 1 - 0,96 = 0,04$

مسلمات الاحتمالات

- يرافق كل حادثة A عدد معين $P(A)$ يسمي احتمال A ويحقق $P(A) \geq 0$
- احتمال وقوع حادثة مؤكدة يساوي واحد اي ان $P(S) = 1$
- اذا كانت A,B حادثتان مانعتان فان $P(AUB) = P(A) + P(B)$

وهذه المسلمة الاخيرة يمكن تعميمها الي أكثر من حادثتين

الاحتمال المشروط

- اذا كانت E_1, E_2 حادثتين في فراغ عينة S لتجربة عشوائية ما فان

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_2)}$$

مثال

تقدم 3 من خريجي جامعة الباحة و5 من خريجي جامعة ام القرى لوظيفتين فما هو احتمال ان تكون الوظيفة الثانية من نصيب خريجي الباحة اذا كانت الوظيفة الأولي من نصيب خريجي الباحة

الحل : احتمال الثاني من الباحة 2/7

مثال

- ألقيت زهرة نرد مرتين متتاليتين فإذا كان مجموع النقاط في المرتين هو 6 فما هو احتمال ظهور 2 في احدى المرتين

الحل

$N(S) = 36$

فاذا كانت A ترمز لظهور 2 في احدى المرتين فان

A={(2,1)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(1,2)(3,2)(4,2) (5,2)(6,2)}

وتكون N(A)=10 واذا كانت B ترمز الي ان المجموع 6 فان

B={(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)} N(B)=5

$(A\cap B)=\{(2,4)(4,2)\}$ $P(B)=5/36$ $P(A\cap B)=2/36$

ويكون الاحتمال المطلوب $P(A/B)= \frac{2/36}{5/36}=\frac{2}{5}$

امثلة

- مثال: القيت زهرة نرد مرة واحدة فاذا علمت ان العدد الظاهر كان زوجيا فما هو احتمال ان يكون 2

الحل: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

E_1تمثل العدد زوجي $E_1\{2,4,6\}$ $P(E_1)=3/6$

E_2تمثل العدد 2 $E_2\{2\}$ $P(E_2)=1/6$

$$P(E_1 \cap E_2)=1/6$$

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$$

- مثال القى زهرا نرد مرة واحدة فاذا علمت ان المجموع للنقاط كان زوجيا فما هو احتمال المجموع يساوي 8

الاحتمالات للأحداث المستقلة والتابعة

- يكون الحدثين (E_1,E_2) مستقلين اذا كان حدوث احدهما لا يؤثر على الاخر و يحسب احتمال الحدثين في آن واحد بالقاعدة:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1,E_2) = P(E_1).P(E_2)$$

اما اذا كان من المعلوم ان حدوث (E_1)يؤثر على حدوث (E_2)فان الحدثين تابعين ويحسب احتمال حدوثهما في آن واحد بالقاعدة

$$P(E_1,E_2)=P(E_1).\ P(E_2/E_1)$$

مثال:

القي زهرا نرد مرة واحدة ما هو احتمال ظهور العدد 4على الزهر الاول والعدد 6 علي الزهر الثاني

الحل

$S=\{1,2,3,4,5,6\} \quad E_1=\{4\} \quad E_2=\{6\}$

(E_1) تمثل ظهور 4 على الزهر الاول $\quad P(E_1)= 1/6$

(E_2) تمثل ظهور 6 على الزهر الثاني $\quad P(E_2)= 1/6$

$$P(E_1 \cap E_2)= P(E_1,E_2) = P(E_1).P(E_2) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$$

مثال

- اذا كان احتمال ان يبقى موظف في منصبة 10 سنوات هو 0.35 واحتمال ان يبقى موظف اخر في منصبة 10 سنوات هو 0.48 ما هو احتمال ان يبقيا في منصبهما 10 سنوات

الحل

الحدثين مستقلين

$$P(E_1,E_2) = P(E_1).P(E_2)=0.35*0.48=0.168$$

مثال

- معمل به 10اجهزة (IBM) و 5 أجهزة (LG) و 7 اجهزة (FLAT) سحب منه جهازان وبدون ارجاع أوجد احتمال ان

1- الجهازان (FLAT) 2- الجهازان (LG) 3- الاول (LG) والثاني (FLAT)

الحل

(E_1) تمثل الجهاز الأول flat $P(E_1)= 7/22$

(E_2) تمثل الجهاز الثاني flat $p(E_2/E_1)=6/21$

الحدثين تابعين

$$P(E_1,E_2)=P(E_1).P(E_2/E_1)$$

$$=7/22*6/21=42/264$$

مثال

- صندوق به 12 تفاحة منها 4تفاحات تالفة اختير عشوائيا ثلاث تفاحات واحدة بعد الاخرى وبدون ارجاع ما هو احتمال ان تكون الثلاثة تفاحات جيدة

الحل

(E_1) تمثل التفاحة الأولى جيدة $P(E_1)= 8/12$

(E_2) تمثل التفاحة الثانية جيدة $P(E_2/E_1)=7/11$

(E3) تمثل التفاحة

الاحداث المتنافية

- يكون الحدثين E_1 و E_2 متنافيين اذا كان حدوث احدهما يمنع حدوث الآخراي ان $P(E_1E_2)=0$ وفي هذة الحالة يحسب احتمال حدوث احدهما بالقاعدة التالية
- $P(E_1+E_2)= P(E_1)+P(E_2)$

الاحداث الغير المتنافية

- يكون الحدثين E_1 و E_2 غير متنافيين اذا كان حدوث احدهما لا يمنع حدوث الآخر اي ان $P(E_1E_2)\neq 0$ وفي هذه الحالة يحسب احتمال حدوث احدهما بالقاعدة التالية
- $P(E_1+E_2)= P(E_1)+P(E_2) - P(E_1E_2)$

مثال

- صندوق به 5 كرات حمراء 7 كرات زرقاء 3كرات بيضاء 8 كرات سوداء سحبت منه كره ما هو احتمال ان تكون :
  1- بيضاء أو حمراء 2- سوداء أو بيضاء
  3- زرقاء أو حمراء أو بيضاء

الحل

1- (E_1) تمثل الكرة المسحوبة بيضاء $P(E_1)= 3/23$

(E_2) تمثل الكرة المسحوبة حمراء $P(E_2)=5/23$

الحدثين متنافيين $P(E_1+E_2)= P(E1)+P(E2) = 8/23$

2- (E_1) تمثل الكرة المسحوبة سوداء $P(E_1)= 8/23$

(E_2) تمثل الكرة المسحوبة بيضاء $P(E_2)=3/23$

الحدثين متنافيين $P(E_1+E_2)= P(E1)+P(E2) = 11/23$

مثال

- معمل به 10اجهزة (IBM) و 5 أجهزة (LG) و 7 اجهزة (FLAT) سحب منه جهاز واحد أوجد احتمال ان يكون الجهاز (FLAT) أو(LG)

مثال

- اختير عدد من العشرة اعداد الصحيحة الموجبة الاولي ابتدأ من العدد واحد بطريقة عشوائية فما احتمال ان يكون

1- زوجيا أو فرديا

2- زوجيا او يقبل القسمة علي 3

3- لا يقبل القسمة علي 2 أو لا يقبل القسمة علي 3

مثال

- سحب حرف من مجموعة الاحرف المكونة للكلمات (طالب)و(مجتمع)و(جامعة)ما هو احتمال ان يكون من
- 1- الكلمة الاولي أو الثانية. 2- الكلمة الثانية أو الثالثة

الحل

$n=14$ (عدد جميع الاحرف)

1- E_1تمثل الحرف من الكلمة الاول

نظرية بيز

- ترجع نظرية بيز للعالم توماس بيز والذي عاش في الفترة 1702-1761م
- تقوم النظرية على معرفة احتمال ان يكون عامل معين من ضمن مجموعة من العوامل هو السبب في الحصول علي حدث معين مثلاً ان يكون الانتاج التالف لمصنع معين سببه الماكينة الاولي اذا كان لدينا اكثر من ماكينة وقد توصل بيز لعلاقة مهمة بين الاحتمالات الشرطية

$$P(E/B) = \frac{P(E).P(B/E)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P(B/E_i)}$$

مثال

- صندوقان يحتوي الاول على 3 كرات خضراء و5 كرات حمراء ويحتوي الثاني علي 2 كرة خضراء وواحدة حمراء وكرتين صفراويتين تم اختيار صندوق عشوائيا ثم سحبت منه كرة ايضا بصورة عشوائية فما هو احتمال ان تكون الكرة المسحوبة

1- خضراء 2- خضراء ومن الصندوق الاول

3- حمراء 4- من الصندوق الاول اذا علمت انها حمراء

الحل

(E1) تمثل السحب من الصندوق الاول (E2)تمثل الكرة خضراء

$P(E1)=1/2$

(E2/E1)تمثل الكرة خضرا بالصندوق الاول

$P(E2/E1)=3/8$

احتمال اختيار كرة خضراء وِ من الصندوق الاول =

$(½)(3/8)=3/16$

(E3) تمثل السحب من الصندوق الثاني

$P(E3)=1/2$

(E2/E3)تمثل الكرة خضرا بالصندوق الثاني

$P(E2/E3)=2/5$

احتمال اختيار كرة خضراء وِ من الصندوق الاول =

$(½)(2/5)=1/5$

احتمال ان تكون الكرة خضراء هو

$P(E2)= P(E2/E1) + P(E2/E3) =3/16+1/5 =31/80$

تابع للحل

- خضراء ومن الصندوق الاول
- $\frac{1}{2}*3/8=3/16$

الكرة حمراء

$\frac{1}{2}*5/8+1/2*1/5=33/80$

من الصندوق الاول اذا كانت حمراء

$$\frac{(\frac{1}{2}*5/8)}{(1/2*5/8)+(1/2*1/5)} = 25/33$$

مثال

- مصنع به ثلاثة ماكينات A,B,C مساهمة كل منها في الانتاج على الترتيب هي 20%,35%,45% فاذا علمنا أن نسبة الانتاج المعيب للثلاث ماكينات على الترتيب هي 5%,2%,3% المطلوب

أ- اذا اخترنا عشوائياً وحدة من انتاج المصنع فما هو احتمال ان يكون معيباً

ب- اذا كان هنالك وحدة معيبة فما هو احتمال ان يكون من انتاج الماكنة B

الحل

أ-

E_1 حدث يمثل الوحدة من انتاج الماكنة A

E_2 حدث يمثل الوحدة من انتاج الماكنة B

E_3 حدث يمثل الوحدة من انتاج الماكنة C

D حدث يمثل الوحدة معيبة

$P(E_1)=0.20 \quad P(E_2)= 0.35 \quad P(E_3)= 0.45$

$$P(D)=P(E_1)P(D/ E_1)+ P(E_2)P(D/ E_2)+ P(E_3)P(D/E_3)$$

تابع للحل

$P(D/E_1)=0.05$ $P(D/E_2)=0.02$ $P(D/E_3)=0.03$

- $(0.20)(0.05)+(0.35)(0.02)+(0.45)(0.03)$
- $=0.0305$
- ب- اذا كان هنالك وحدة معيبة فما هو احتمال ان يكون من انتاج الماكنة B
- $\sum P(E_i).P(D/E_i) = 0.0305$

$$P(E_2/D)=\frac{P(E_2)P(D/E_2)}{\sum P(E_i).P(D/E_i)}=\frac{(0.35)(0.02)}{(0.0305)}=0.23$$